減反率の推定について
A New Method for Gentan Probability Estimation

鈴木太七
Suzuki, Tasiti

キーワード:　減反率、ラプラス変換、樹木の寿命モーメント

要約:　減反率とは森林が植栽されてから伐採される迄の寿命の分布のことである。これまで減反率推定に用いられてきた χ^2 分布は、伐採統計の平均と分散を用いたガンマ分布で表されていた。本論文では、森林はある林齢までまったく伐採されることがないことに注目し、森林の寿命分布に対しラプラス変換を利用して、伐採統計から得られる寿命分布の平均、分散、歪度を用いて、新たな減反率推定が可能になることを示した。

Abstract:　Gentan probability is defined as the distribution of survival time for a forest stand until being harvested after a plantation. The original method to estimate Gentan probability is based on derivation of the gamma distribution from an average and variance of harvest timing. Given that a forest stand is not harvested up to a certain age, a new method is proposed to estimate Gentan probability by means of the Laplace transformation of the distribution of survival time. The method is to estimate the distribution of survival time, i.e., Gentan probability, through an average, variance and skewness of the tree life span from an existent harvest statistical data.

はじめに

森林のような寿命をもった生物資源の推移を論じようとすれば、どうしても寿命の確率を問題としなければなりません。減反率とは、結局森林の寿命の確率に他なりません。

ところで確率論は前世紀に大発展しました。20世紀は相対性理論を除くと統計力学、量子力学、原子核物理学などすべて確率論的な物理学の時代だったのであります。確率論の書物は本棚にあふれる程にありますが、それは我々林学の分野の者にとっては、いささか抽象的すぎて、私などはそれを読んで理解するだけで一生を使ってしまったように思います。本日はそう言った私の体験的確率論といったものの話をさせていただくつもりです（参照：伊藤1944、1952、河田1948、Kolmogorov and Yushkevich 2001）。

始めにお断りして置きますが、短時間にかなり沢山の事柄を矢継ぎ早に解説いたしますので、そうした事柄に始めての方は、全部を一度に理解しようなどとは考えないで下さい。軽い気持ちで聴き流して下さい。また沢山の式が出てまいりますが、その計算の詳細を説明する時間がありませんので、それは後からゆっくりと吟味してやろうと構えて下さい。そのための資料は何かの形でお渡しできるようにします。

離散的な確率変数と平均値

さて、本論に入る訳でありますが、確率論をKolmogorovの公理から始めていたのでは、とても時間が足りませんので、確率とか確率変数とかいった概念については何となくわかっておられるという前提で話を始めます（参照：Feller 1950、Fisz 1980、Gnedenko 1980）。しかし、前半の離散的な場合と後半の連続的な場合では同じような内容を繰り返してお話しますので、後半の部分は前半を思い出して類推していただくと理解し易いかと思います。

確率変数Xが離散的に $X = 0, 1, 2, 3, \cdots$ というようなプラスの整数値しかとらないとき、

[1] $P(X=0)=p_0,\ P(X=1)=p_1,\ P(X=2)=p_{2,}\ \cdots$

となっていると仮定します。ここで$P(\cdot)$という記号は( )の内容の事柄の起きる確率を表すものと約束しておきます。

[2] $p_0, p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$

の全体をXの確率分布といいます。以下、確率変数とその分布とはいつも一緒にして考えることにし、それを表現する場合にも両者を区別せず、確率変数と言ったり、分布と言ったりします。($p_0, p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$)の数字の一組は$n+1$次元のベクトルとなっていることを一寸記憶して置いて下さい。

確率変数Xの平均値$E(x)$を

[3] $E(X) = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + \cdots$

で定義します。すなわち、$E(X)$とは、ある確率変数Xについて、そのXがとる値iと、そのXがその値iをとる確率p_iとの積和をつくる演算を指示する演算子(operator)のことであります。もっと一般的に言うと、確率変数Xの関数$f(X)$もまた確率変数で、

[4] $P(f(X) = f(i)) = P(X = i),\ i = 0, 1, 2, \cdots$

でありますから、$f(X)$の平均は

[5] $E(f(X)) = f(0)p_0 + f(1)p_1 + f(2)p_2 + \cdots$

となります。

確率変数Xの他に同じようなもう一つの確率変数Yの分布が

[6] $P(Y = 0) = q_0, P(Y = 1) = q_1, P(Y = 2) = q_2, \cdots$

となっているとしたとき、これら二つのX、Yの間に

[7] $P(X = i, Y = j) = P(X = i) \cdot P(Y = j) \qquad i, j = 0, 1, 2, \ldots, n$

が、すべてのi、jの組み合わせについて成り立つときXとYを互いに独立であるといいます。以下の話に出てくる確率変数はすべて互いに独立であるとしておきます。

独立な確率変数X、Yに対して、その和も、その定数倍aXも同様に確率変数になります。これらに対して平均演算子Eの線形性が成り立ちます。すなわち

[8] $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

[9] $E(aX) = aE(X)$

となります。その内容は「和の平均は平均の和であり、a倍の平均は平均のa倍である」と言った、わかり切った内容を意味しますが、演算子Eの定義からも容易にそれを導くことができます。

Moment系とMarkov、Chebyshevの定理

確率分布Xに対して、その逐次のベキ乗の平均値をmoment系といい

[10] $E(X) = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + \cdots + n \cdot p_n = \mu_1{}'$

[11] $E(X^2) = 1^2 \cdot p_1 + 2^2 \cdot p_2 + 3^2 \cdot p_3 + \cdots + n^2 \cdot p_n = \mu_2{}'$

[12] $E(X^3) = 1^3 \cdot p_1 + 2^3 \cdot p_2 + 3^3 \cdot p_3 + \cdots + n^3 \cdot p_n = \mu_3{}' \cdots$

・・・・・・・・・・・

というように定義します。これらに対して、平均値 $\mu_1{}'(=\mu)$ のまわりでの逐次のmomentを

[13] $E(X-\mu)^2 = \mu_2, E(X-\mu)^3 = \mu_3, \cdots$

というように定義します。後者は中心momentと呼ばれます。しかしmomentと中心momentとは互いに他から導くことが出来るという意味で互いに等価であります。中心momentの中でも、特に二次のそれ

[14] $\mu_2 = E(X-\mu)^2 = \mu_2{}' - \mu^2 = \sigma^2$

は分散variance σ^2 と呼ばれ、その平方根 σ 標準偏差は、確率分布を考える上で、平均と並んで重視されます。その理由は次のChebyshevの定理によります。ここではそれを証明するために、もう少し基本的なMarkovの定理:「マイナスにならない確率変数Xが平均値 $E(X)=\mu$ をもつとき、$a > 1$なる定数aについて

[15] $P(X \geq a\mu) < \dfrac{1}{a}$

となる」を証明しておきます。

平均値の定義によって

[16] $\mu = E(X) = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + \cdots$

でありますが、$a\mu$ より大きな最小の整数をmとして、右辺の初めのm項を省略すると

[17] $\mu \geq (m+1)p_{m+1} + (m+2)p_{m+2} + \cdots \geq a\mu[p_{m+1} + p_{m+2} + \cdots] = a\mu P(X \geq a\mu)$

が成り立ち、両辺を $a\mu$ で割れば、Markovの不等式が得られます。以上のMarkovの定理をマイナスにならない確率変数 $(X-\mu)^2$ に適用すると、$(X-\mu)^2$ の平均値は分散 $\sigma^2 = E(X-\mu)^2$ でありますから、これから直ちにChebyshevの定理

[18]　$P((X-\mu)^2 \geq a^2\sigma^2) \leq \dfrac{1}{a^2}$

が得られます。これは

[19]　$P(\mu - a\sigma \leq X \leq \mu + a\sigma) \geq 1 - \dfrac{1}{a^2}$

を意味しています。ここで例えばa=3と置けば、確率変数Xがその平均値μの$\pm 3\sigma$の範囲にある確率は$1-\dfrac{1}{3^2}=\dfrac{8}{9}$、約89%以上であるということになります。この初等的な定理は、しかし、確率論の基礎をなす大定理なのであります。

独立な二つの確率変数X、Yの分散を、それぞれvar(X)、var(Y)とすると、それらの和X+Y、あるいは、その定数倍aXの分散は、

[20]　$\mathrm{var}(X+Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y)$

[21]　$\mathrm{var}(aX) = a^2\,\mathrm{var}(X)$

となります。これらの関係は分散が平均値のまわりでの二次のmomentであることから導かれ、分散の法則と呼ばれています。これを用いると、同じ分散σ^2をもった独立なnヶの確率変数の平均値Xの分散はσ^2/nとなります。このことをChebyshevの定理に用いると、

[22]　$P\left(\mu - \dfrac{a\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu + \dfrac{a\sigma}{\sqrt{n}}\right) \geq 1 - \dfrac{1}{a^2}$

が得られます。この推定幅はnが大きくなるに従って$1/\sqrt{n}$になります。実験の回数を多くして平均値をとることの意味はこれによって説明されるのであります。

こうした古典的なChebyshevの推定はあまりに臆病なものであることは経験的に知られておりました。しかし、ごく最近この原稿の執筆中にChernovという新人が「互いに独立なnヶの確率変数の平均値$\overline{X}$に対して

[23]　$P\left(\bar{X} \geq \dfrac{a\sigma}{\sqrt{n}}\right) \sim \exp(-a^2/2)$

である」という定理を証明していることを知りました。これによれば、a=3に対するその確率はほぼ1%であります。Chebyshevからおよそ一世紀後に同じような初等的な考え方によって、それが格段に精密化されたことになります（参照：Spencer 2001）。

ここに名前が出てまいりましたChebyshev （1821－1894）、Markov（1856－1922）は19世紀から20世紀初頭にかけてのロシアの大数学者であり、また確率論の創始者だったのであります。Markovの鎖（chain）のことは既にご承知のことと思います（参照：Suzuki 1970）。"確率とはLebesgue測度である"というテーゼによって近代的確率論の基礎を建設した（1933年）Kolmogorov（1903－1987）は、この伝統を受け継いだのであります（参照：伊藤1944）。

確率変数はその極限をとると大抵の場合正規分布に収束してしまうため、通常は偏った分布はあまり取り扱われることがありません。しかし我々が取り扱う寿命分布には偏ったものが出現することがあります。そのような偏りは、平均値μの回りでの三次momentを用いて、歪度Skewness

[24] $\gamma = \dfrac{E(X-\mu)^3}{\sigma^3}$

で与えられます。歪度は、$\gamma > 0$のとき、裾を右に引いた heavy Tailed、$\gamma < 0$のとき、裾を左に引いたlight Tailedの分布を表します。

積率母関数m.g.f. (moment generating function)

確率分布$p_0, p_1, p_2, \cdots$をもった確率変数Xに対して

[25] $F(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + p_3 s^3 + \cdots$

で定義されるsのベキ級数をつくると、これはs=1のとき

[26] $F(1) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + \cdots = 1$

となることから、これは$s \leq 1$の範囲で収束し、またこの範囲で何回でも微分できます。すなわち

[27] $F'(s) = p_1 + 2sp_2 + 3s^2 p_3 + \cdots$

[28] $F''(s) = \qquad 2p_2 + 3 \cdot 2sp_3 + \cdots$

[29] $F'''(s) = \qquad\qquad 3 \cdot 2p_3 + \cdots$

ここにs=1を代入すると、ベキ級数に関するAbelの定理が利用できて

$$F'(1) = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \cdots = E(X) = \mu_1$$

[30]
$$\begin{aligned} F''(1) &= 2\cdot 1\cdot p_2 + 3\cdot 2\cdot p_3 + \cdots \\ &= 1\cdot(1-1)p_1 + 2\cdot(2-1)p_2 + 3\cdot(3-1)p_3 + \cdots \\ &= (1^2\cdot p_1 + 2^2\cdot p_2 + 3^2\cdot p_3 + \cdots) - (1\cdot p_1 + 2\cdot p_2 + 3\cdot p_3 + \cdots) \\ &= E(X^2) - E(X) = \mu_2{}' - \mu_1{}' \end{aligned}$$

となります。以下同様に逐次のmomentが計算できます。momentを産み出すという意味で、この*F(s)*を積率母関数(moment generating function)と呼びます。以下これをm.g.f.と略称します。これは正しくは確率母関数または単に母関数と呼ばれるべきもので、平均演算子を使えば、*F(s)=E(s)*と書かれます。これに対して積率母関数は$E(e^s)$で定義されておりますが両者は本質上全く同じものであることから、私は前者を積率母関数と呼んでまいりました。

m.g.f.を考え出したのは18世紀末のフランスのLaplace (1749-1827)であります。彼は確率を"同等に確からしい(equally likely)"というアヤシゲな概念を用いて説明しました。"サイコロのすべての目の出現が、何故同様に確からしいのか？"という問いに対して、"それが同等に確からしく無いと考える理由が無いからだ"と答えたと伝えられています。Kolmogorovの確率論はこうした部分の論理的な構成を公理系として確立したものであります。

しかし、Laplaceは確率論の課題を正しく掴んでいたようで、後に発展する確率論のテーマは全て彼が扱ったものであります。後からご説明しますLaplace変換は、彼の考案したものではなかったのでありますが、本質上は一種のm.g.f.に他ならないものであったので、後の人が彼を称えてつけた呼称であると何処かで読んだ記憶があります。

Moment generating functionが重要視されるもう一つの理由は、それが"たたみ込み"の計算に極めて都合が良いという事情があります。すなわち、*X*、*Y*が確率変数でそれぞれのm.g.f.が*X(s)*、*Y(s)*だとすると、それらの、たたみ込み、*Z=X+Y*のm.g.f.は

[31] $Z(s) = X(s)\cdot Y(s)$

となります。何故ならば

$$
[32]\quad
\begin{aligned}
X(s)\cdot Y(s) &= (p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \cdots)(q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + \cdots) \\
&= (p_0 q_0 + (p_1 q_0 + p_0 q_1)s + (p_2 q_2 + p_1 q_1 + p_0 q_2)s^2 + \cdots \\
&= P(X+Y=0) + P(X+Y=1)s + P(X+Y=2)s^2 + \cdots \\
&= Z(s)
\end{aligned}
$$

となるからであります。このことを用いると、同じm.g.f. $F(s)$をもったn個の確率変数の和のm.g.f.は$F(s)^n$になることがわかります。

Moment問題その１

今までの説明によって確率分布から逐次のmoment系が得られることがわかりましたが、逆にmoment系を与えて、そのようなmoment系をもつ確率分布を求めるという問題を考えてみます。すなわち

$$
[33]\quad
\begin{array}{lllllll}
p_1 & + & p_2 & + \cdots & + & p_n & = 1 - p_0 \\
1\cdot p_1 & + & 2\cdot p_2 & + \cdots & + & n\cdot p_n & = \mu_1{}' \\
1^2\cdot p_1 & + & 2^2\cdot p_2 & + \cdots & + & n^2\cdot p_n & = \mu_2{}' \\
 & & \cdots\cdots\cdots & & & & \\
1^{n-1}\cdot p_1 & + & 2^{n-1}\cdot p_2 & + \cdots & + & n^{n-1}\cdot p_n & = \mu_{n-1}{}'
\end{array}
$$

を、$p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$に関する連立一次方程式と見立てて、これを解くということであります。このとき、その係数行列式

$$
[34]\quad \Delta = \begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & 2 & \cdots & n \\
1^2 & 2^2 & \cdots & n^2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
1^{n-1} & 2^{n-1} & \cdots & n^{n-1}
\end{vmatrix}
$$

は、いわゆるVandermondeの行列式で、決して0になることがありませんから、上の連立方程式はCramerの公式によって解くことができます。例えば

$$
[35]\quad p_1 = \begin{vmatrix}
1-p_0 & 1 & \cdots & 1 \\
\mu_1{}' & 2 & \cdots & n \\
\mu_2{}' & 2^2 & \cdots & n^2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\mu_{n-1}{}' & 2^{n-1} & \cdots & n^{n-1}
\end{vmatrix} \Big/ \Delta
$$

であります。このようにmomentを与えて、もとの確率分布を求める問題を、moment問題といいます。

以上によって、この場合のmoment問題が一意的に解かれるという事がわかりました。したがって確率分布 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ とmoment系 $\mu_1',\mu_2',\cdots,\mu_{n-1}'$ とは等価であるという事になります。

連続な確率変数、寿命分布を表す諸関数

次に連続な確率変数についてご説明します。始めに申したように離散的な場合と対照しながら類推をしていただければ、容易にご理解いただけると思います。

連続な確率変数 X に対しては、それが区間 $(x,x+\Delta x)$ に落ちる確率 $P(x \le X < x+\Delta x)$ が

[36] $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X < x+\Delta x)}{\Delta x} = p(x)$$

となるような関数 $p(x)$ を、X の密度関数といいます。離散的な確率分布 $p_0,p_1,\cdots,p_n$ の一組が、n+1次元（ベクトル）と考えられるということを述べましたが、それをn+1本の棒グラフに表示することが出来ます。それに対応して、関数 $p(x)$ を、無限個の点 x での $p(x)$ の長さの棒グラフの集まりと考えることが出来ます。その見方に従えば関数とは無限次元空間の一点であるということになります（図１）。

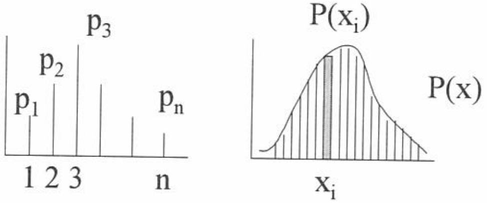


図１離散分布の有限次元ベクトルと連続分布の∞次元ベクトル

以上の説明は極めて乱暴なもので、数学者が到底納得しないであろうことも、十分承知しております。無限個という部分にまだ問題があるからであります。しかし何としてもその直感的な見通しの点でこうした見方は断然優れています。これはいかにも幼稚なものに見えますが、意外に近代的な関数空間という考え方そのものなのであります。

以下では慣例に従って寿命分布密度関数を $f(x)$ と書き表すことにします。すなわち、ある物の寿命を X としたとき

[37] $P(x \le X < x + \Delta x) = f(x)\Delta x$

とします。そうすると寿命が x より小さい確率は

[38] $P(X \le x) = \int_0^x f(u)d(u) = F(x)$

で与えられます。この関数 $F(x)$ を X の分布関数(distribution function)といいます。$F(x)$ を微分すると

[39] $F'(x) = f(x)$

となります。逆にあるものが x 以上に生存する確率は

[40] $G(x) = P(X > x) = 1 - F(x) = \int_x^\infty f(u)du$

となります。さらに年齢 x での死亡率

[41] $\varphi(x) = f(x)/G(x)$

という関数もしばしば用いられます。[39]式を使えば

[42] $\varphi(x) = -G'(x)/G(x) = -d(\log G(x))/dx$

となります。これを積分して、$G(0)=1$ を使うと

[43] $G(x) = \exp\left(-\int_0^x \varphi(u)du\right)$

が得られます。このように寿命の分布を表現する関数として $f(x), F(x), G(x)$ および $\varphi(x)$ などが用いられますが、そのどれからでも互いに他を導くことが出来るという意味で等価なのであります（図２参照）。

一例として、ある年齢での死亡率 $\varphi(x)$ が

[44] $\varphi(x) = \rho = const$

というモデルがよく用いられますが、これから

[45] $f(x) = \rho \exp\left(-\int_0^x \rho du\right) = \rho \exp(-\rho x)$

[46] $G(x) = \int_x^\infty \rho \exp(-\rho u)du = \exp(-\rho x)$

が得られます。このような寿命分布を指数分布といいます。寿命分布としては最も簡単な基本的な分布であります。寿命分布を $f(u)$ とすれば、j 齢級での減反率 $q(j)$ とは、森林の寿命が j と $j+1$ の間にある確率に他なりませんから

[47]　$q(j)=\int_j^{j+1} f(u)du = F(j+1)-F(j)=G(j)-G(j+1)$

となります。またいわゆる減反曲線は

[48]　$G(j)=\int_j^{\infty} f(u)du = 1-F(j)$

となります。

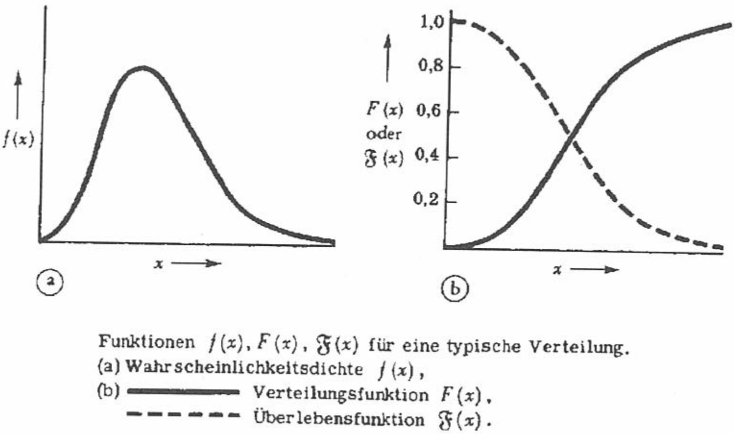


図２関数 $f(x), F(x), G(x)$ の代表例（参照：Cox 1966)

Moment問題その２

連続分布に対しても、離散分布のときと同じようなmoment系が得られますが、ここでは和の代わりに積分が用いられます。すなわち

$$\int_0^{\infty} f(u)du = 1$$

[49]

$$\int_0^{\infty} uf(u)du = \mu_1'$$

$$\int_0^{\infty} u^2 f(u)du = \mu_2', \quad \cdots$$

となります。

ところで、これらの方程式から逆に原関数 $f(x)$ を求めるということは、積分方程式を解くということであります。積分方程式とは前に述べました関

数空間の考え方からすれば、無限個の点 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ における関数の値 $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \cdots$ を定めるということであって、上の問題は無限次元の連立方程式

$$
\begin{aligned}
f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots \quad &= 1 \\
x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + x_3 f(x_3) + \cdots &= \mu_1{}' \\
x_1^2 f(x_1) + x_2^2 f(x_2) + x_3^2 f(x_3) + \cdots &= \mu_2{}' \\
\cdots\cdots &
\end{aligned}
\qquad [50]
$$

に帰着して、これは離散なmoment問題と問題の本質的には同じものだということになります。しかし、今度は方程式の本数が無限個ある点が違っています。数学の世界では無限が混入してまいりますと、俄に常識が通用しない事態が生じてまいります。

この場合も、まさにその例でありまして零関数と呼ばれる、すべてのmoment系が0

[51] $\int_0^\infty u^r g(u) du = 0, \quad r = 0,1,2,\cdots$

となるといった病的な関数 $g(x)$ の存在が想定されています。もしもそのような関数が存在したとすると、$f(x)+g(x)$ という関数も $f(x)$ と同じmomentをもち得るという厄介な事態が生じて、一般的にはmoment問題の一意性が保たれないことになってしまいます。

伏見康次先生（名大）の「確率論及統計論」は戦争中に出た確率論の名著で、私もこの書物のお陰をこうむった一人でありますが、そこには、こうした零関数のいくつかの例が挙げられております。しかし、それが本当に零関数かどうかという証明は載っておりません。式の形があまりに複雑すぎて、私にはそれが零関数であるかどうかを調べることが出来ませんでした。もしもそのような零関数が本当に存在したとすれば、moment問題が一意的に定められないことは勿論、これから述べようとしているLaplace変換論も根底からひっくり返ってしまう筈であります。伏見先生の書物だったので、この部分は今まで疑念を持たずに過ごしてきましたが、今回の講演にあたって、この部分を調べ直している間に、Doetschが"Lebesqueの意味でほとんど至る

ところゼロな関数のmomentは全て0である"と言っていることを知りました。これは確かに一種の零関数であります（参照：Doetsch 1974）。

逆に、全てのmomentがゼロの関数は、それ自身の $(0,\infty)$ に亘る積分が

[52]　$\int_0^\infty g(t)dt = 0$

となりますが、この時関数 $g(t)$ が"ほとんど到るところゼロ"となることはLebesgue積分論における周知の定理であります（参照：Temple1971）。

ここで少しばかり傍道をしてLebesgue積分論に言う"ほとんど到るところ、(almost everywhere)"という言葉の意味について注釈をして置きましょう。話を簡単にするために区間 $(0,1)$ に話を限ることにします。

この区間には $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\cdots$ など無限個の有理数（分数）が存在しますが、それらを

$$\begin{array}{cccc}
\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\
\frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \frac{2}{6} \\
\frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \frac{3}{6} & \frac{3}{7} \\
\frac{4}{5} & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

のように配列して、重複するものを省略しながら１番、２番、３番、・・・というように番号づけることが出来ます。また、全ての有理数はこの配列の何番目かに必ず含まれます。このように１番、２番、３番、・・・と番号づけられる無限を可付番無限(countable infinite)といいます。区間 $(0,1)$ の上の有理数全体は、ここに示したように可付番無限であります。

ところで二つの有理数の中間には、必ずその平均値がありますが、その平均値もまた有理数でありますから、この区間上には有理数は隙間なく稠密(dense)にあって、その区間からすべての有理数を取り除いてしまうと、もう残りの点が無くなってしまうように思われますが、次に示すように決してそのような事にはならないのであります。

区間 (0,1) 上で 1 番始めに $\frac{1}{2}$ という点の上に幅 $\frac{\varepsilon}{2}$ のラベルをはって、その点をカバーします。次に $\frac{1}{3}$ の上に幅 $\frac{\varepsilon}{2^2}$ のラベルを、それから $\frac{2}{3}$ に幅 $\frac{\varepsilon}{2^3}$ のラベルを、・・・という風にラベルをはって行きます。すると有理数全体を

[53] $$\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2^2}+\frac{\varepsilon}{2^3}+\cdots=\varepsilon$$

の幅のラベルでカバーすることができることになります。だから区間 (0,1) からすべての有理数を取り除いても、残る区間は $1-\varepsilon$ あることになります。ε はどんなに小さく取っても以上の議論には関係ありませんから、残りの区間は依然として長さ1のままあるという事になります。いま、有理数の上では1、その他では0という値をとるという関数を考えると、この関数は幅ゼロの可付番無限個の点を除いて考えれば、実質上はほとんど0であると言って良いことになります。このように ”可付番無限個の点を除けば・・・である“ ということを ”ほとんど到るところ・・・である“ と表現するのがLebesgue積分論の要点となっているのであります。

前に述べました関数の無限次元ベクトルは、可付番無限次元にならないことが難点なのでありますが、もう少し補足的な説明をすれば、それで差し支えないことが言えます。しかし、この話題はここではもう止めて置きます。

話を前に戻しますと、Doetschの結論は、全てのmomentが0となる零関数とは、Lebesgueの意味で“ほとんど到るところゼロ”な関数以外には無いということであります。このことから二つの分布 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ が同じmoment系を持つとすると

[54] $$\int_0^\infty \tau^r[f_1(\tau)-f_2(\tau)]d\tau=0, \quad r=0,1,2,\cdots$$

となって

[55] $$f_1(t)-f_2(t)=g(t)$$

となるような“ほとんど到るところゼロ”となる関数 $g(t)$ が存在することになります。換言すれば「同じmoment系をもつ二つの関数の差は、たかだか“ほとんど到るところ”ゼロである」ということ、すなわち、“ほとんど到るところゼロ”となる関数を無視すれば

[56] $$f_1(t)=f_2(t)$$

と言って良いこと、すなわち、moment問題は“ほとんど一意的である”というスッキリした結論が得られるのであります。

Laplace変換に関するWidderの本にはLebesgueの名は無く、moment問題の解答はひどく込み入ったものであります（参照：Widder 1968）。戦争中に出された伏見先生の本にも、その名がありません。Lebesgue(1875-1941)の積分論は1902年に出ておりますが、それが脚光を浴びるようになったのは、前に述べましたKolmogorovの確率論のテーゼ（参照：Kolmogorov 1933）が世に知られるようになって以来のことであります。多くの学者を悩ましてきたmoment問題がLebesgue積分のお陰で、かくも簡明に解決された訳であります。実を申しますと私はLebesgue積分論の実用上の効用について疑問を抱いておりましたが、今回は改めてその優秀さを実感いたした次第であります。

無限次元林齢空間

話が無限に関連したついでに、無限次元の林齢空間について一寸触れておきます。私は従来、n 次元空間の考えをそのまま延長して行けば、無限次元も類推できるだろう、n 次元の n はいくらでも大きくできるからと思っていました。しかし、何度も申しますように、数学では無限が一度関わって来ますと、突然それまでの常識が通用しなくなります。例えば"n 次方程式は n 個の根をもつ"のだから"無限次方程式

[57] $$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = 0$$

は無限個の根をもつと思っていると、一方

[58] $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = 0$$

には根がない"というような事態が起こってまいります。

前に離散的なmoment問題は完全に解けると解説いたしましたが、本当は、林齢は1、2、3、・・・のように可付番無限個を考えなければならないので、本当のmoment問題の方程式は

[59] $$\begin{aligned} 1p_1 + p_2 + p_3 + \cdots &= 1 - p_0 \\ 1p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \cdots &= \mu_1' \\ 1^2 p_1 + 2^2 p_2 + 3^2 p_3 + \cdots &= \mu_2' \\ &\vdots \end{aligned}$$

のように可付番無限次の連立一次方程式でなければならなかった訳であります。従って、これは連続変数の場合と同じような難点をもっておりまだ解けたとは言えなかったのであります。

ここには無限次元の行列が出現してきます。ところがvon Neumann が1929年に"非有界な無限次行列"に対して否定的な論文を提出して以後、数学者は無限次行列、および行列式を扱わなくなってしまいました（参照：von Neumann 1929）。幸いなことに、ここに出て来ましたVandermonde型の無限行列では、そこから無限次元の固有方程式を収束するベキ級数として展開することができ、それが無限個の固有値をもつことから、固有方程式を無限個の因数に分解することが出来ました。その結果を用いて無限次遷移行列のスペクトル分解をし、その空間での不動点、すなわち無限次元林齢空間での"広義の法正林"の存在を証明することが出来たのであります(参照：Suzuki 1970)。ついでに減反率に関する私の論文を発表の年代順に文献リスト（Suzuki 1959-1999）に挙げておきます。

私は減反率及び広義の法正林概念を1959年に（鈴木1959）、英文では1963年に（Suzuki 1963）、またヨーロッパでは1970年に公表してきました（Suzuki 1970）。後にプラハ大学のKoubaから私信1985年によって、彼が同じ考えを1969年に学位論文として提出し、1972～1975年の間にこれを公表しているとのことを知りました。残念ながら彼の業績はチェコ語で、また英文のそれも掲載文献の年代、名称が不明であるため引用が出来ません。

積率母関数としてのLaplace変換

離散的な分布 $p_0, p_1, p_2, \cdots$ に s のベキを乗じて加え合わせ、m.g.f.を作ったのと同じように連続な確率分布 $f(x)$ に e^{-sx} を乗じて区間 $(0,\infty)$ で積分すると、いわゆるLaplace積分

[60] $$F(s)=\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx$$

ができますが、これは連続な分布 $f(x)$ のm.g.f.となります。この式はその形から明らかなように分布 $f(x)$ についての関数 e^{-sx} の平均値を意味しています。従って

$$F(s) = E(e^{-sx})$$

[61] $$= E(1 - sx + \frac{s^2}{2!}(-sx)^2 + \frac{s^3}{3!}(-sx)^3 \quad + \cdots)$$

$$= 1 - sE(X) + \frac{s^2}{2!}E(X^2) - \frac{s^3}{3!}E(X^3) + \cdots$$

でありますから、右辺の s^r の項の係数が

[62] $(-1)^r \dfrac{\mu_r{}'}{r!}, \quad r = 1, 2, 3, \cdots$

となります。

前に挙げました指数分布では

$$F(s) = \int_0^\infty \rho e^{-\rho x} e^{-sx} dx = \frac{\rho}{\rho + s}$$

[63] $$= \frac{1}{1 + \frac{s}{\rho}} = 1 - \frac{s}{\rho} + \frac{s^2}{\rho^2} - \frac{s^3}{\rho^3} + \cdots$$

よって

[64] $\mu_1{}' = \dfrac{1}{\rho}, \quad \mu_2{}' = \dfrac{2!}{\rho^2}$

これから

[65] $\sigma^2 = \mu_2{}' - \mu_1^2 = \dfrac{1}{\rho^2}$

が得られます。すなわち指数分布では、平均値と標準偏差が等しくなっております。

上述のLaplace積分は、s の関数として、$s > 0$ のとき収束します。この場合原関数 $f(x)$ と関数 $F(s)$ とが対応しますが、それを

[66] $\mathfrak{L}[f(x)] = F(s)$

と書いて、$\mathfrak{L}$を f のLaplace変換といいます。以下それを$\mathfrak{L}$ -変換と略称することにします。このとき演算子$\mathfrak{L}$について、線形性

[67] $a)\quad \mathfrak{L}[f_1 + f_2] = \mathfrak{L}[f_1] + \mathfrak{L}[f_2]$
$b)\quad \mathfrak{L}[af] = a\mathfrak{L}[f]$

が成り立ちます。それは演算子$\mathfrak{L}$ が本質的には線形性をもった積分だったからであります。$\mathfrak{L}$-変換の公式には沢山なものがありますが、

[68] $c)\quad \mathfrak{L}[f'(x)] = s\mathfrak{L}[f] - f(0)$

[69] $d)$ $\mathfrak{L}\left[\int_0^x f(u)du\right] = \mathfrak{L}[f]/s$

など、s による掛け算割り算が、原関数の微分、積分に対応しています。これから得られる

[70] $\mathfrak{L}\left[\int_x^\infty f(u)du\right] = [1 - \mathfrak{L}[f]]/s$

が減反曲線の$\mathfrak{L}$-変換になっていることに注目して置いて下さい。

以上によって関数 $f(x)$ とその$\mathfrak{L}$-変換 $F(s)$ が対応することがわかりましたが、逆に像関数 $F(s)$ を与えて原関数 $f(x)$ を定めるためには、いわゆる反転公式

[71] $f(x) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(s)e^{sx}ds$

があります。この積分は複素平面上の線積分で、この積分路をBromwich積分路といいます（参照：Cox 1966、Doetsch 1974）（図３参照）。

Integrationsweg in der
komplexen s-Ebene.

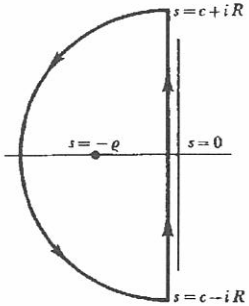


図３複素平面上での積分路（Cox 1966）

その実際上の計算は、積分路の左側にある $F(s)$ の極(pole)での留数(residue)を求めるという形で行われるということを知って置いて下さい。それらについては複素関数論のCauchyの定理を学んでいただく必要があります（Ahlfors 1966）。

従って形式的に見る限り$\mathfrak{L}$-変換は一対一に対応しているように思われますが、そこでも前にmoment問題に関して触れました零関数の存在が障害となってまいります。すなわちすべてのmomentが

[72]　$\int_0^\infty u^r g(u)du = 0, \quad r = 0,1,2,\cdots$

となるような関数$g(x)$の$\mathfrak{L}$-変換は

[73]
$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[g] &= \int_0^\infty e^{-su} g(u)du \\ &= \int_0^\infty \left(1 - su + \frac{s^2}{2!}u^2 - \cdots\right) g(u)du \\ &= \int_0^\infty g(u)du - s\int_0^\infty ug(u)du + \frac{s^2}{2!}\int_0^\infty u^2 g(u)du - \cdots \\ &= 0\end{aligned}$$

となりますから

[74]　$\mathfrak{L}[f+g] = \mathfrak{L}[f]$

となって、逆$\mathfrak{L}$-変換に対する一意性が成り立たないことになります。この点が前世紀前半までの数学者を悩まし、$\mathfrak{L}$-変換そのものが何かウサン臭い目で見られていたのであります。

しかし、既におわかりいただけたように零関数とは、Lebesgueの意味で、"ほとんど至るところ"ゼロな関数にすぎませんから、これを無視することにすれば、$f(x)$と$g(x)$とは、"ほとんど"一対一に対応していると称して良いことがわかるのであります。

二つのマイナスにならない連続な確率変数X、Yが、それぞれ分布密度$f(x), g(x)$をもつとき、それらの和$Z = X + Y$の分布密度$h(x)$は

[75]　$h(x) = \int_0^\infty f(t)g(x-t)dt$

で与えられます。これは離散な場合から容易に類推されるでしょう。この場合も$h(x)$は$f(x)$と$g(x)$の“たたみ込み”といいます。

ところで「関数$h(x)$が、二つの関数$f(x)$と$g(x)$との“たたみ込み”であるとき、それらの$\mathfrak{L}$-変換の間に

[76]　$H(s) = F(s)G(s)$

である。」という定理があります。このことも離散的な場合のm.g.f.の結果から類推できるのであります。$\mathfrak{L}$-変換が確率論において重要視される理由は、主としてこの性質が極めて便利なためであります。これによれば同一の分布 $f(x)$ をもった n 個の“たたみ込み”は、$\mathfrak{L}[f]^n$ となります。

Erlang分布とGamma分布

前に挙げました指数分布 n 個の“たたみ込み”は

[77] $$\mathfrak{L}[f]=\left(\frac{\rho}{\rho+s}\right)^n$$

となります。その原関数は反転公式によって求められますが、その分布関数は

[78] $$f(x)=\frac{\rho(\rho x)^{n-1}e^{-\rho x}}{(n-1)!}$$

となります。ここでは、ただその結果の正しいことだけを示しておきます。すなわち

[79] $$\begin{aligned}\mathfrak{L}[f]&=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty \rho(\rho x)^{n-1}e^{-\rho x}e^{-sx}dx\\&=\left(\frac{\rho}{\rho+s}\right)^n\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty y^{n-1}e^{-y}dy\\&=\left(\frac{\rho}{\rho+s}\right)^n\end{aligned}$$

となります。右辺の最後の積分はGamma積分で

[80] $$\int_0^\infty y^{n-1}e^{-y}dy=\Gamma(n)=(n-1)!$$

であります。この分布はErlangの求めたもので、Erlang分布と呼ばれています。Erlang分布の$\mathfrak{L}$-変換を s のベキ級数に展開すると

[81] $$\begin{aligned}\left(\frac{\rho}{\rho+s}\right)^n&=\left(1+\frac{s}{\rho}\right)^{-n}\\&=1+\left(-\frac{n}{\rho}\right)s+\frac{n(n+1)}{2!\rho^2}s^2-\quad\cdots\end{aligned}$$

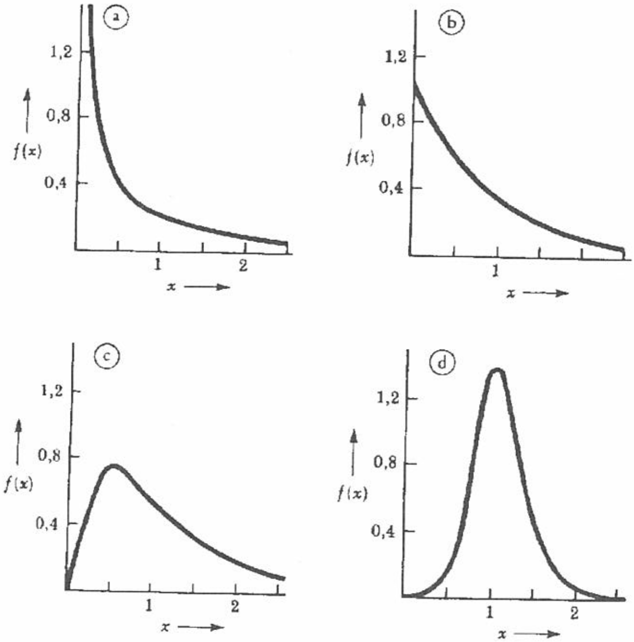
となりますから、これからmomentを求めますと

[82] $\mu_1' = \dfrac{n}{\rho}, \quad \mu_2' = \dfrac{n(n+1)}{\rho^2}, \quad \sigma^2 = \dfrac{n}{\rho^2}$

などが得られます。よってその変動係数は

[83] $\dfrac{\sigma}{\mu_1} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

となります。これはnが正の整数であることから$1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \cdots$のように、極めて限定された値しか取り得ないのであります。



Einige Spezialfälle der Gamma - Verteilung mit dem Mittelwert 1.
(a) $\alpha = 1/2$, (b) $\alpha = 1$, $f(x)$ Wahrscheinlichkeitsdichte.
(c) $\alpha = 2$, (d) $\alpha = 10$,

図 4 Gamma分布の形状（Cox 1966）

その点を改善するために、パラメータnを任意の数$\alpha(>0)$に置きかえて

[84] $f(x) = \dfrac{\rho(\rho x)^{\alpha-1} e^{-\rho x}}{\Gamma(\alpha)}, \quad \alpha > 0$

をGamma分布といいます。分母のGamma関数はStirlingの公式

[85] $\Gamma(\alpha) \sim \sqrt{2\pi} e^{-\alpha} \alpha^{\alpha - \frac{1}{2}}$

を用いて計算します。

Gamma分布の$\mathfrak{L}$-変換は

[86] $\mathfrak{L}[f] = \left(\dfrac{\rho}{\rho + s} \right)^{\alpha}$

となります。これは必ずしも、sの有理関数とはなりませんが、式の形としてはErlang分布と同じように簡単であって、広く応用されております。その概形のいくつかをCoxの本の独訳から引用させて貰います（図４、参照：Cox 1966、Doetsch 1974）。

Gamma分布において$\rho = 1/2, \alpha = b/2$ （bは整数）とすると、自由度bのχ^2分布になります。すなわち、私が減反率計算として最初に提案したmodelは、一種のGamma分布だったことになります。

新しい減反率評価のための変形Gamma分布

以上のようなGamma分布を減反率に適用しようとする場合に、この際、是非訂正して置きたい点が一箇所あります。それはGamma分布の前提となってきた指数分布が、

[87] $\varphi(x) = \rho = const$

を前提としている部分であります。減反率の場合、森林はある林齢bまで、この前提は決して成り立ちません。そこで森林の寿命分布をbだけ平行移動して

[88] $$\begin{aligned} f(x) &= 0, \quad x \le b \\ &= \frac{\rho(\rho(x-b))^{\alpha-1} e^{-\rho(x-b)}}{\Gamma(\alpha)}, \quad b < x \end{aligned}$$

という形に想定することにします。するとその$\mathfrak{L}$-変換は

[89] $\mathfrak{L}[f] = e^{-sb} \left(\dfrac{\rho}{\rho + s} \right)^{\alpha}$

となります。それをsのベキ級数に展開すると

$$e^{-sb}\left(\frac{\rho}{\rho+s}\right)^{\alpha}=e^{-sb}\left(1+\frac{s}{\rho}\right)^{-\alpha}$$

[90]
$$=1-\left(b+\frac{\alpha}{\rho}\right)s+\frac{1}{2!}\left(b^2+2\frac{\alpha}{\rho}b+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\rho^2}\right)s^2$$
$$-\frac{1}{3!}\left(b^3+3\frac{\alpha}{\rho}b^2+3\frac{\alpha(\alpha+1)}{\rho^2}b+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\rho^3}\right)s^3+\cdots$$

となり、これから

[91]
$$\mu_1'=b+\frac{\alpha}{\rho}$$
$$\mu_2'=b^2+2\frac{\alpha}{\rho}b+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\rho^2}$$
$$\mu_3'=b^3+3\frac{\alpha}{\rho}b^2+3\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\rho^3}$$
$$\cdots\cdots$$

さらに

[92]
$$\mu_1=\mu_1'=b+\frac{\alpha}{\rho}$$
$$\mu_2=\mu_2'-\mu_1'^2=\frac{\alpha}{\rho^2}$$
$$\mu_3=\mu_3'-3\mu_1\mu_2'+2\mu_1'^3=\frac{2\alpha}{\rho^3}$$

が得られます。これらを用いて

[93] $$\rho=\frac{2\mu_2}{\mu_3},\quad \alpha=\frac{4\mu_2^3}{\mu_3^2},\quad b=\mu_1-\frac{2\mu_2^2}{\mu_3}$$

などのパラメータが、伐採統計の $\mu_{1,}\mu_{2,}\mu_3$ から得られます。これらのパラメータをもったGamma分布から減反率を数値積分として求めれば良い訳であります。本日の講演のテーマ"減反率の推定について"に対する私の解答は、このような変形Gamma分布ということであります。

まとめ

森林の資源管理の数値モデルとしていろいろなものが考案されて行くと思いますが、始めに申しましたように、寿命をもった生物資源の取り扱いに

は、何らかの意味で減反率、またはそれと同等なものが関連して来る筈であります。

減反率という名前は、私が日本大学におりました頃、日本の森林生態学の創始者の一人であられた栗田　勲先生に相談に乗っていただいて命名しました。私はかねがね日本の学術用語が輸入品ばかりだということを残念に思っていましたので、敢えてこのような日本語を外国に輸出しようという魂胆であったのであります。ずっと後になって稲作の減反政策として出てきたものとは全く違ったものであるということを、この際強調して置きます。それと混同される懼れがあっても、今となって見ますとGentanという用語が外国でも通用しておりますので、これを今さら改めない方が良いと考えています。

最初のχ^2分布のmodelは物理学の方で、霧箱中でのα粒子の飛跡の統計として使われていたものを借用しました。原子核から一定のエネルギーをもって放出されたα粒子が、空気の分子とn回の衝突をして運動エネルギーを失い、飛跡として消失するというmodelで、前述の伏見先生の本（伏見1941）に載っております。それを森林は伐採されるまで何回か伐採されるための条件をうる機会に出会い、それが丁度n回になったら伐採されるというように転用しました（鈴木1961、1963）。これに対して友人から、森林が伐採されるための条件とは一体どんなものと考えたら良いか？という質問をされ、それに対して“森林にとって、例えば、1cm太くなることが伐採されるための一つの条件をうる機会であり、それが丁度n cmになったら伐採されると考えたらよい”という説明をしたところ、大勢の人に納得してもらうことができました。ところがこうした説明があまりウケが良かったものですから、その後その説明がそれ自身として独り歩きを始めてしまい、私自身も自分の教科書（鈴木1979）にそのような説明を書いてしまいました。それが誤っていたことは、たぶん堀　高夫先生（名大）に指摘していただいたのだと思います。それは成長をcmで測るか、mmで測るかによってχ^2分布の自由度が違ってしまうことからだけでも判ります。こうした誤った説明のために樹木の成長と減反率とを結びつけようとした人がいて、それが駄目だということの説明に苦労しました。今回、導入したGamma分布のαにも何の物理的な意味も無いことを改めて強調しておきます。

本日の話をまとめますと、

1)　確率変数 X またはその分布密度として $(p_0, p_1, p_2, \cdots, p_n)$　または $f(x)$

2)　moment 系 μ_1', μ_2', μ_3'　または $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \;\cdots$

3)　moment generating function として $F(s)$ または $\mathfrak{L}[f]$

の３者が互いに等価(equivalent)だということであります。またmoment系の中では μ_1, μ_2, μ_3 の３つが確率分布の主要な性質を支配しているという意味で特に重要だということであります。

寿命分布の確率分布としてはGamma分布の他にWeibull分布とか、対数正規分布とかが挙げられますが、三次のmomentまで一致していれば、どんな関数型を用いても、結果にはそれ程差がありません。どれも別に理論的な根拠がある訳では無いからであります。そうした場合には確率としての取り扱い上、$\mathfrak{L}$-変換とその逆変換とが容易であるという点でGamma分布が最も良いだろうというのが私の結論であります。

大変沢山の事柄を大急ぎで話しましたので、それを直ちにご理解いただけるなどとは、私自身考えておりません。しかし、この話の中に一つでも何か興味をもっていただくような点があったなら、これを契機にして、ご自身で研究していただくようお願いします。勉強とは結局自分でやらなければ出来ないものです。ご静聴有難うございました。

引用文献

Ahlfors, L.V.　1966. Complex Analysis, McGraw-Hill, 317p.

Cox, D.R. 1966. Erneuerungstheorie, Oldenburg, pp.5-152 (Renewal Theory, Mathuen, 1962).

Doetsch, G. 1974. Introduction to the theory and application of the Laplace transformation, Springer, 326p. (Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Birkhäuser, 1970).

Feller, W. 1950. An introduction to probability theory and its applications I, Wiley, 509p.

伏見康治 1941. 確率論及統計論、河出書房、484p.

Fisz, M. 1980. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, VEB Deutscher, 777p.

Von Gadow, K. 2000. Scenario planning for sustainable forest management in "Sustainable Forest Management", Kluwer, 319-356.

Gnedenko, B.W. 1980. Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Harri Deutsch, 399p.

伊藤　清 1944. 確率論の基礎、岩波書店、94p.

伊藤　清 1952. 確率論、岩波書店、405p.

河田敬義 1948. 確率論、共立出版、337p.

Kolmogorov, A. 1933. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Erg.d.Math. Nr.3, 62p.

Kolmogorov, A.N. and Yushkevich, A.P. 2001. Mathematics of the 19th century: mathematical logic, algebra, number theory, probability theory (translated from the Russian by A. Shenitzer, H. Grant and O.B. Sheinin), Basel, Birkhäuser Verlag, 322p.

Von Neumann, J. 1929. Allgemeine Eigenwerttheorie Hermietischer Funktional-operatoren, Math.Annalen, 4-131.

Spencer, J. 2001. Discrete probability in Mathematics Unlimited – 2001 and Beyond, Springer, 1095-1103.

Struik, D.J. 1987. A concise history of mathematics, Dover, 228p.

鈴木太七 1959. 遷移確率行列による収穫予定、林学会関東支部大会報告、36-38.

鈴木太七 1960. Markov行列による収穫予定、日大農獣医学部研究報告第11号、178-189.

鈴木太七 1961. 木材の生産予測について(I)、科学技術庁資源局、116p.

Suzuki, T. 1963. A method of yield prediction in forestry, Bio. Soc., 13-th and 14-th Meeting Chapter of Japan, 14-17.

鈴木太七 1963. 木材の生産予測について(II)、科学技術庁資源局、54p.

Suzuki, T. 1970. An application of Markov chains in forestry "Gentan Probability", IUFRO in Nancy, 口頭発表.

鈴木太七 1972. 林業における確率過程論の応用(I)、林学会誌、234-243.

鈴木太七 1973. 林業における確率過程論の応用(II)、林学会誌、234-237.

鈴木太七 1975. 林業におけるマルコフ・プロセスの応用、数理科学、51-56.

鈴木太七 1979. 森林経理学、朝倉書店、197p.

Suzuki, T. 1981. Die Gentan Wahrsheinlichkeit als Anwendung von Markov-Ketten, IUFRO in Kyoto, 165-170.

Suzuki, T. 1983. Beiträge zur biometrischen Modellbildung in der Forstwirtschaft, Sauerländer, 105p.

Suzuki, T. 1984. The Gentan probability: A model for the improvement of the normal forest concept and of forest planning, Proc. IUFRO Symp., Univ. Tokyo, 12-24.

Suzuki, T. 1993. Ein neuer Beweis für die Existenz des Normalwalds im weitern Sinne, IUFRO Symp. In Freising, 口頭発表.

Suzuki, T. 1999. Die abzählbar unendlichdimensionale Altersübergangsmatrix, Die grüne Reihe 12, 131-144.

Temple, G. 1971. The structure of Lebesgue integration theory, Oxford Univ., 5-184.

Widder, D.V. 1968. The Laplace transformation, Princeton Univ., 3-406.