

不確実環境下の森林資源管理に対する 最適確率制御モデル

Stochastic Control Modelling for Forest Stand Management Under Uncertain Environments

吉本 敦

Yoshimoto, Atsushi

キーワード: 森林経営、森林経済、不確実性、確率モデル、確率動的計画法

要約: 本研究では、価格ダイナミクスを連続確率過程である幾何ブラウン運動で捉え、ダイナミクスを離散化し、確率動的計画法と結合することにより、不確実性下における森林資源管理に対する確率制御モデルの構築を行った。ここで構築するモデルは、間伐やその他の森林施業を考慮せず、価格の不確実性のみを考慮し、最適伐期齢の探求を目的としている。本確率制御モデルでは、伐採後に再造林あるいは、経営を放棄するというオプションを考慮した。分析の結果、経営の継続が困難な価格帯においては、最適伐期齢が長くなる傾向があることが分かった。また、価格が十分に高い状態では、確率制御モデルから得られる最適伐期齢と決定論的アプローチによるものはほぼ一致することも分かった。価格が将来的に下落する確率が高くなる場合、最適伐期齢は全体的に早くなる傾向があった。これは、経営放棄の機会が増す確率が上昇し、その結果将来的な期待収益が低下することに起因するものである。

Abstract: In this paper, a stochastic control model is constructed by incorporating geometric Brownian motion to capture uncertain price dynamics into a one-stage and two-state stochastic dynamic programming model. The proposed model is to search for optimal harvest timing under price uncertainty without considering other forestry operations, e.g., thinning. We consider an additional option to replant a forest stand or to abandon the management for another use of a forest land besides harvesting. Our experimental analysis

shows that optimal harvest timing under stochastic log prices is delayed when the price level is crucial to maintain the management. It is also showed that when the current log price is sufficiently high, optimal harvest timing from the stochastic and the deterministic approach becomes the same. With a downward trend on price dynamics, optimal harvest timing tends to be hastened overall. This stems from the fact of a depreciation effect on the future return, which stimulates harvesting at an earlier period.

はじめに

ここ数年来、アメリカ、カナダ、北欧といった国から日本に輸出される木材が国内の木材市場で多くのシェアを占めるようになり、将来的な価格が益々不確実になってきた。価格の不確実性は、さらに GNP・為替レート・利子率などの経済要因の変化からも影響を受けている。価格の不確実性を伴う昨今の木材価格の下落傾向は、現在我が国において重要視されている持続的な森林管理を難しくしている。

日本の森林資源管理の状態を見ると、多くの森林は山腹のかなり急勾配な場所に位置し、それゆえ、育林費、伐採費と言った森林経営費用が依然高いままである（行武・吉本 2001）。作業場での高性能機械の活用が地理的に難しいため、人的な労働が必用不可欠となり、費用削減が困難になるからである。その結果、伐採後の森林経営の継続を考慮する際、林産物の価格変動が森林経営者の再生林に対する意思決定に大きな影響を与える。

これまで、金融分野におけるオプションに関する研究は不確実性下での投資活動の評価を行う研究に多大な貢献を果たしてきた。一般に、不確実性を伴う価格のダイナミクスは2つの部分で捉えられる。すなわち、決定論的（平均）な動きと確率論的（分散）な動きである。Brennan and Schwartz（1985）は確率モデルを適用し銅採鉱評価を行い、Bailey（1991）は農業経営評価に確率モデルを適用した。森林分野においては、Zinkhan（1991）の林地からの土地利用転換オプション評価がある。Morck et al.（1989）は成長や価格といった確率的な環境下での森林経営の評価を行った。その他、確率的なモデルを扱った研究では、Clarke and Reed（1989）、Reed and Clarke（1990）、Haight and Holmes（1991）、Reed and Ye（1994）、Thomson（1992）、Yoshimoto and Shoji（1998）、Plantinga（1998）、Thorsen

(1999) などがある。彼らの研究の多くは、不確実性を価格に対して想定し、価格のダイナミックスを確率微分方程式により描写するアプローチを取っている。また、不確実性下における最適化では、離散型の意味決定フレームワーク内で、確率動的計画法を用いるのが一般的である。

本研究の目的は、不確実環境下における森林資源管理のための確率制御モデルを構築することである。ここでは、幾何ブラウン運動により丸太価格の不確実性を捉える。森林資源の成長にはリチャードの成長関数 (Richards 1958) を用いて、成長の不確実性は考慮しない。本論文の構成は以下の通りである。第2章では、確率動的計画法を導入した確率制御モデルを構築する。第3章ではここで仮定する幾何ブラウン運動の係数推定法について述べる。実証的な分析は第4章で行い、最後に結論を述べる。

森林資源管理に対する確率制御モデル

ここで考慮する森林資源管理に対する確率制御モデルは、幾何ブラウン運動と確率動的計画法を基礎にしている。幾何ブラウン運動は確率的な価格ダイナミックスを捉えるものであり、確率動的計画法は、離散型最適化フレームワークにおける不確実な現象下での最適意思決定を行うものである。なお、本論文では最適伐期齢の探求のみに焦点を絞り、間伐や他の施業に対する意思決定については考慮しない。

まず、丸太の価格ダイナミックスに対し、次の幾何ブラウン運動を仮定する。

$$[1] \quad dX_t = \alpha X_t dt + X_t \sigma dB_t \quad \text{or} \quad \frac{dX_t}{X_t} = \alpha dt + \sigma dB_t$$

X_t は時間 t における丸太価格、 α は価格の瞬間相対変化率、 σ は相対変化率の瞬時標準偏差である。 B_t 項は以下の性質に従う標準ブラウン運動を表す。

1. $B_0 = 0$
2. $\{B_t, t \geq 0\}$ は定常・独立に変化する
3. 全ての $t (>0)$ に対して、 B_t は分散 t 、平均 0 の正規分布に従う。

これらの性質は、後に述べる最尤法による係数決定において重要な役割を果たす。

先にも言及したように、価格ダイナミクスは2つの部分に分けられる。方程式[1]の右辺第1項は決定論的（平均）な部分であり、第2項は確率論的（分散）な部分である。幾何ブラウン運動には、解析的に解が存在し、最適化フレームワークに容易に適用できるという利点がある。

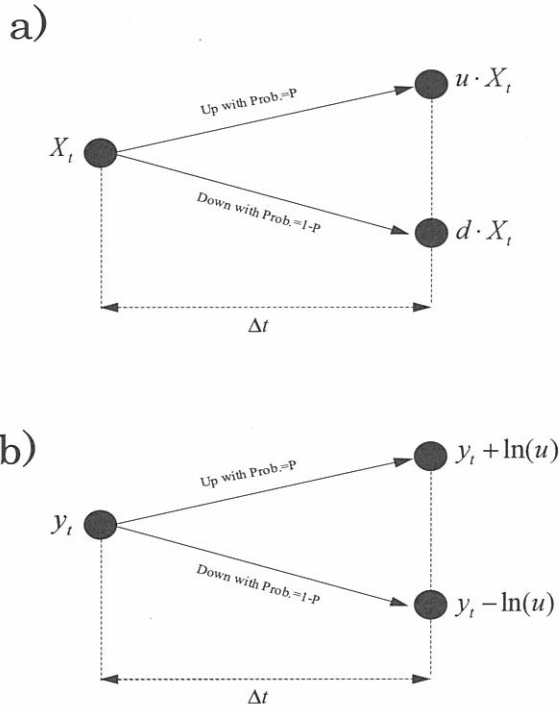


図1 離散化されたプロセス

a) オリジナルプロセス、 b) 対数変換したプロセス

次に、確率動的計画法を通して最適化問題を解くにあたり、上記の連続型確率モデル[1]を離散化する。ここでは、二項過程近似法 (Cox et al. 1979) を使用する。すなわち、上記の過程を微小時間において2つの動き（上昇 u 、下降 d ）で捉える。その時、微小な時間間隔 $(t, t+\Delta t)$ において、 X_t が

$u \cdot X_t$ に増加する確率を P 、 $d \cdot X_t$ に減少する確率を $(1-P)$ として、図 1 (a) に描かれるような離散過程を考える。方程式[1]において、決定論的あるいは期待部分のみに着目すると、時間 $(t, t+\Delta t)$ に得られる期待値は

$$[2] \quad X_{t+\Delta t} = X_t e^{\alpha \Delta t}$$

と表される。また、図 1 (a) の過程から期待値は、

$$[3] \quad X_{t+\Delta t} = P \cdot u \cdot X_t + (1-P) \cdot d \cdot X_t$$

となり、両者が一致することから、確率 P が以下のように算出できる。

$$[4] \quad P = \frac{e^{\alpha \Delta t} - d}{u - d}$$

次に 2 つの変化量 (上昇 u 、下降 d) を探求する。丸太の価格を X_t として、 $y_t = f(X_t) = \log(X_t)$ と変数変換した新たな変数 y_t を導入する。伊藤の公理 (Gardiner 1985) を用いると、

$$[5] \quad dy_t = \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dB_t$$

となる。すなわち、新たな変数 y_t は一定なドリフト項 $(\alpha - \sigma^2/2)dt$ を持つ単純ブラウン運動に従うことが分かる。なお、この導入については後で詳しく述べることにする。新しい変数に対して、微小時間に P の確率で $\ln(u)$ になる場合と、 $(1-P)$ の確率で $-\ln(u)$ になる場合の 2 通りを想定する。すなわち、図 1 (b) のように、増減の動きを同じ絶対値で捉える。図 1 (a)、

(b) どちらのプロセスも同値であるので、 Δy_t の分散は上式[5]より

$$[6] \quad \text{Var}(\Delta y_t) = \sigma^2 (dB_t)^2 = \sigma^2 \Delta t$$

となり、図 1 (b) の過程からは

$$[7] \quad \text{Var}(\Delta y_t) = P \cdot (\ln(u))^2 + (1-P) \cdot (-\ln(u))^2 = (\ln(u))^2$$

となる。従って、両式から、

$$[8] \quad u = e^{\pm \sigma \sqrt{\Delta t}}$$

となる。よって、次の係数変換により、ここで仮定した二項過程は $\Delta t \rightarrow 0$ に対し幾何ブラウン運動[1]に収束することが分かる。

$$[9] \quad u = e^{\sigma \sqrt{\Delta t}}$$

$$[10] \quad d = e^{-\sigma \sqrt{\Delta t}}$$

$$[4] \quad P = \frac{e^{\alpha \Delta t} - d}{u - d}$$

なお、 u と d は、確率 P 、 $(1-P)$ でそれぞれ丸太価格 X_t が変化する割合である。

本研究で構築する確率動的計画法モデルは、1期間・2状態 (one-stage-two-state) の動的計画法モデルである。時間が期間変数 (stage variable)、価格水準と林齢が状態変数 (state variable) である。上記で得られた二項過程を用いると、第 n 期、 $n \cdot \Delta t$ 、において、 i 回価格が上昇した価格 $S_{n,i}$ は

$$[11] \quad S_{n,i} = u^i \cdot d^{n-i-1} \cdot S_{1,0}$$

となる。ここでの $S_{1,0}$ は第1期現在における価格である。

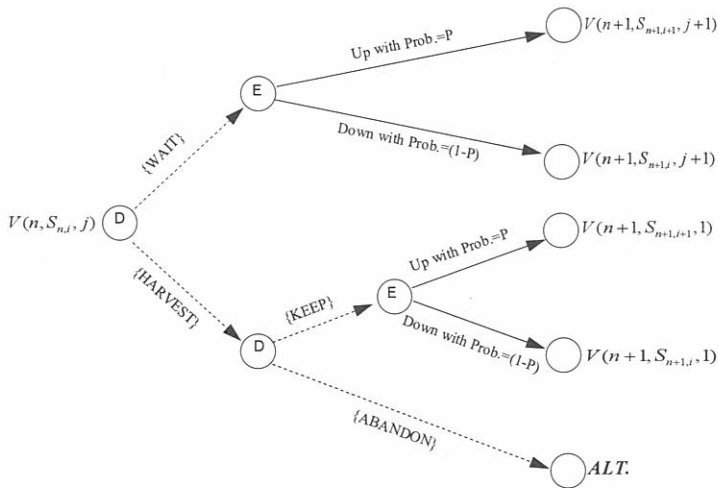


図2 伐採意思決定樹系図

確率動的計画法の最適化問題に対する目的は、伐採活動から得られる期待収益の最大化により、最適伐採期齢を探索することである。可能な管理行動 (制御変数、control variable) は、今ある森林を伐採するという「伐採」行動と伐採しないという「待機」行動である。さらに、伐採後に経営を「放棄」するというオプションを導入した。すなわち、仮に伐採が決定された場合、再造林を行う「継続」行動、または土地利用転換による「放棄」行動のオプション選択を考慮した。図2の樹系図は、上記の離散化された価格過程

における意思決定行動のネットワークを示す。このネットワークでは、最適伐期齢の探求ができるだけでなく、「放棄」のオプションを導入することにより森林所有者が経営活動をやめる、すなわち「放棄」する価格水準の探求が同時に可能となる。

数学的な表現を用いれば、上記の最適意思決定問題は以下のように表すことができる。まず、 $V(n, S_{n,i}, j)$ を第 n 期の (i, j) 状態における最大期待収益とする。すなわち、第 n 期、 i 状態価格、 j 林齢における最適化方程式 (Ross 1983 参照) は

$$[12] \quad V(n, S_{n,i}, j) = \max\{E_{n,i,j}[W], E_{n,i,j}[H]\}$$

となる。ここで

$$[13] \quad E_{n,i,j}[W] = \frac{P \cdot V(n+1, S_{n+1,i+1}, j+1) + (1-P) \cdot V(n+1, S_{n+1,i}, j+1) - C_a}{1+r}$$

$$[14] \quad E_{n,i,j}[H] = S_{n,i} \cdot Q_j + \max\{ALT, \frac{P \cdot V(n+1, S_{n+1,i+1}, 1) + (1-P) \cdot V(n+1, S_{n+1,i}, 1) - C_a}{1+r} - C_r\}$$

である。 n 期において、 j 林齢、 i 回の価格上昇に対する「待機」行動による期待収益は $E_{n,i,j}[W]$ である。 r は 1 期間に対する割引率であり、 C_a は年間経営費用である。伐採決定が選択されると、期待収益はその次の「継続」行動もしくは「放棄」行動に対する期待値に依存する。「継続」行動は森林の経営を持続することを意味しており、「放棄」行動は経営の中止、すなわち土地利用転換を意味する。 Q_j は j 林齢のヘクタール当たり材積、 C_r は n 期での伐採直後にかかる造林費用を表している。[14] 式の右辺第 1 項 $S_{n,i} \cdot Q_j$ は伐採から得られる収益を表す。次の \max を伴った第 2 項は、伐採後の期待経営収益である。土地利用転換により得られる収益と森林経営の継続からの割引期待収益を比較することにより、伐採後の行動が選択される。なお、「待機」、「伐採-継続」行動から得られる期待収益はそれぞれ 1 期間割引かれる。

構築する 1 期間・2 状態の動的計画ネットワークには、 $n = 1 \sim N$ 、 $i = 0 \sim n$ 、 $j = 1 \sim J+n$ と変化する二項決定樹系図を用いる。ここで、 N は最終期間、 J は第 1 期における最高齢の林齢である。価格の変化と林齢の変化は、期間

の増加に伴い1単位ずつ変化する。すなわち状態は次のように推移する。仮に「待機」行動が n 期において選択されれば、次の期間に林齢は1単位増加する。ここで、丸太価格の上昇に対しては、第 n 期において状態が i 状態価格で j 林齢である場合、次の第 $(n+1)$ 期において、 $(j+1)$ 林齢、 $(i+1)$ 状態価格へ推移する。価格の減少に対しては $(j+1)$ 林齢、 i 状態価格に推移する。「伐採-継続」行動が選択される場合、次の第 $(n+1)$ 期で、林齢は1となる。価格状態については、上昇を伴った第 $(i+1)$ 状態価格、価格減少では i 状態価格にそれぞれ推移する。経営の放棄、すなわち「伐採-放棄」行動が選択されれば、 ALT の放棄状態になる。

最後に、現時点における $j=1 \sim J$ それぞれに対する最適解 $V(1, S_{1,0}, j)$ を比較することにより、最適伐期齢が探求できる。その時、確率動的計画法の解法アルゴリズムについては、一般的に使用される繰り返し演算過程を用いた (Hillier and Lieberman 1990)。解法アルゴリズムは、それぞれの状態における最適解を最終期間から現在の期間へと順に後戻りして行うものである。すなわち、まず、最後の期間において全状態に対し「伐採-放棄」行動を選択する。現時点(初期)で林齢が1から J までであるため、最終期間 N では $(J+N)$ 個の異なった林齢クラスが存在し得る。今、 n 期での選択行動の集合を $\{D_n\}$ とする。 $\{W\}$ 、 $\{H-K\}$ 、 $\{H-A\}$ をそれぞれ「待機」、「伐採-継続」、「伐採-放棄」行動を表すものとすれば、

$$[15] \quad D_n = [\{W\}, \{H-K\}, \{H-A\}]$$

となる。 $d_{n,i,j}^* \in D_n$ を n 期間の (i,j) 状態における最適選択とすれば、最終期間で全ての状態、 $i=0, \dots, N$ と $j=1, \dots, J+N$ に対して $d_{N,i,j}^* = \{H-A\}$ となる。対応する目的関数値は

$$[16] \quad V(N, S_{N,i}, j) = S_{N,i} \cdot Q_j + ALT \text{ for } i=0, 1, \dots, N, j=1, 2, \dots, J+N$$

となる。ここで ALT は土地利用転換に対する価値である。確率動的計画法での繰り返し演算のアルゴリズムは図3に示す通りである。最適伐期齢の探求には、まず、現時点において全ての j に対する $V(1, S_{1,0}, j)$ を算出する。次に、現時点における全ての解の中で「伐採」行動が選択される最も若い林齢が、現在の丸太価格 $S_{1,0}$ に対する最適伐期齢となる。

ステップ0.初期化

$n=N$ とし、 $d_{N,i}=\{H \cdot A\}$ for $i=0, \dots, N$ and $j=1, \dots, J+N$ とする。
 最終期の期待収益 $V(N, S_{N,i}, j) = S_{N,i} \cdot Q_j + ALT$ for $i=0, 1, \dots, N, j=1, 2, \dots, J+N$ を算出する。
 なお、 $S_{N,i} = u^i \cdot d^{N-i-1} \cdot S_{1,0}$

ステップ1.繰り返し演算

$n=n-1$ とする。それぞれの状態において最適行動、 $d^*_{n,i} (\in D_n)$ for $i=0, \dots, n$ and $j=1, \dots, J+n$ を探求する。なお、最適化方程式は以下の通りである。

$$V(n, S_{n,i}, j) = \max_{\{W\}, \{H\}} \{E_{n,i,j}[W], E_{n,i,j}[H]\}$$
 ただし、

$$E_{n,i,j}[W] = \frac{P \cdot V(n+1, S_{n+1,i+1}, j+1) + (1-P) \cdot V(n+1, S_{n+1,i}, j+1) - C_a}{1+r}$$

$$E_{n,i,j}[H] = S_{n,i} \cdot Q_j + \max_{\{A\}, \{K\}} \{ALT, \frac{P \cdot V(n+1, S_{n+1,i+1}, 1) + (1-P) \cdot V(n+1, S_{n+1,i}, 1) - C_a - C_r}{1+r}\}$$

$$S_{n,i} = u^i \cdot d^{n-i-1} \cdot S_{1,0}$$

ステップ2.判断

もし、 $n=1$ ならステップ3に移動、その他はステップ1に戻り繰り返し演算を行う。

ステップ3. 最適伐期齢の決定

下記を満足する最適伐期齢、 t_{opt} を探求し、演算を終了する。

$$t_{opt} = \{j \mid \inf_j \quad \text{subject to } d^*_{1,0,j} = \{H - K\} \text{ or } \{H - A\}\}$$

図3 確率動的計画法における繰り返し演算

確率微分方程式の係数推定

前章で示したように、価格の不確実性に対する離散過程の構築では、係数の値が重要な役割を果たしている。この章では最尤法を用いた幾何ブラウン運動の係数推定の方法について述べる。まず、変数変換により、 $y_t = f(X_t) = \log(X_t)$ とすると、伊藤の公理 (Gardiner 1985) より、

$$[17] \quad dy_t = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)(dX_t \cdot dX_t)$$

となる。 y_t の1階微分 $f'(X_t)$ と2階微分 $f''(X_t)$ は

$$[18] \quad \frac{dy_t}{dX_t} = f'(X_t) = \frac{1}{X_t} \quad \text{and} \quad \frac{d^2y_t}{dX_t^2} = f''(X_t) = -\frac{1}{X_t^2}$$

であるので、方程式[17]は

$$[19] \quad dy_t = \frac{1}{X_t} dX_t + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{X_t^2} \right) (dX_t \cdot dX_t)$$

となる。\$dX_t\$に方程式[1]を代入すると、方程式[19]は

$$[20] \quad dy_t = \frac{1}{X_t} (\alpha X_t dt + \sigma X_t dB_t) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{X_t^2} \right) (\alpha X_t dt + \sigma X_t dB_t) (\alpha X_t dt + \sigma X_t dB_t) \\ = \alpha dt + \sigma dB_t - \frac{1}{2} \{ \alpha^2 (dt \cdot dt) + \sigma^2 (dB_t \cdot dB_t) + 2\alpha \sigma dt \cdot dB_t \}$$

となる。\$(dt \cdot dt) = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0\$ そして \$(dB_t \cdot dB_t) = dt\$ (Øksendal 1995) であるため、

$$[5] \quad dy_t = \left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dB_t$$

が導出される。

一連の離散価格データから係数を推定するために、方程式[5]を離散形で表現すると

$$[21] \quad y_{t_{n+1}} - y_{t_n} = \left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t_{n+1} - t_n) + \sigma (B_{t_{n+1}} - B_{t_n})$$

となる。ここで

$$[22] \quad dy_t = y_{t_{n+1}} - y_{t_n}$$

$$[23] \quad dB_t = B_{t_{n+1}} - B_{t_n}$$

である。なお、\$B_{t_n}\$は標準ブラウン運動であるから、\$(B_{t_{n+1}} - B_{t_n})\$は平均0、分散\$(t_{n+1} - t_n)\$の正規分布法則に従う。よって、\$(y_{t_{n+1}} - y_{t_n})\$は平均\$(\alpha - \sigma^2/2)(t_{n+1} - t_n)\$、分散\$\sigma^2(t_{n+1} - t_n)\$の正規分布の確率変数であることが分かる。

一連の観測データ \$(X_{t_0}, X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_N})\$ を考えると、最尤推定法により、係数 \$(\alpha, \sigma)\$ の推定値は、それらの観測データが最も高い確率で抽出されるように算出される。観測データ \$(X_{t_0}, X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_N})\$ に対し、変換されたデータ \$(y_{t_0}, y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_N})\$ を考えると、

$$[24] \quad p(X_{t_0}, X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_N}) = p(y_{t_0}, y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_N}) \left| \frac{\partial(y_{t_0}, y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_N})}{\partial(X_{t_0}, X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_N})} \right|$$

となる。ここで、 $|\frac{\partial(\dots)}{\partial(\dots)}|$ はヤコビアン行列の行列式の絶対値である。方程式[24]の両辺の対数を取ると、観測データ $(X_{t_0}, X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_N})$ に基づいた対数尤度関数は

$$\begin{aligned}
 \log p(X_{t_0}, X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_N}) &= \log p(y_{t_0}, y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_N}) + \sum_{n=0}^N \log\left(\frac{1}{X_{t_n}}\right) \\
 [25] \qquad \qquad \qquad &= \log p(y_{t_0}, y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_N}) - \sum_{n=0}^N \log(X_{t_n})
 \end{aligned}$$

と表される。従って、観測データ $(X_{t_0}, X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_N})$ に対する係数の値は方程式[25]を最大化することによって推定できる。ただし、

$$[26] \quad p(y_{t_0}, y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_N}) = p(y_{t_0}) \cdot \prod_{n=0}^{N-1} p(y_{t_{n+1}} | y_{t_n})$$

である。 $(y_{t_{n+1}} - y_{t_n})$ は平均 $(\alpha - \sigma^2/2)(t_{n+1} - t_n)$ 、分散 $\sigma^2(t_{n+1} - t_n)$ の正規分布に従うために、

$$[27] \quad p(y_{t_{n+1}} | y_{t_n}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_{n+1} - t_n)}} \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{\{y_{t_{n+1}} - y_{t_n} - (\alpha - \frac{\sigma^2}{2})(t_{n+1} - t_n)\}^2}{\sigma^2(t_{n+1} - t_n)}\right]$$

となる。そして、 $(y_{t_0}, y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_N})$ に対する対数尤度関数は

$$\begin{aligned}
 &\log p(y_{t_0}, y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_N}) \\
 [28] \quad &= \sum_{n=0}^{N-1} \log p(y_{t_{n+1}} | y_{t_n}) + \log p(y_{t_0}) \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\log\{2\pi\sigma^2(t_{n+1} - t_n)\} + \frac{\{y_{t_{n+1}} - y_{t_n} - (\alpha - \frac{\sigma^2}{2})(t_{n+1} - t_n)\}^2}{\sigma^2(t_{n+1} - t_n)} \right] + \log p(y_{t_0})
 \end{aligned}$$

となる。その結果、二つのデータセット $\{y_n\}$ 、 $\{X_{t_n}\}$ と方程式[25]から、係数 (α, σ) の最尤推定法による推定値は以下の関数を最大化することによって算出できる。

$$\begin{aligned}
 [29] \quad \log p(X_{t_0}, X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_N}) &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\log\{2\pi\sigma^2(t_{n+1} - t_n)\} + \frac{\{y_{t_{n+1}} - y_{t_n} - (\alpha - \frac{\sigma^2}{2})(t_{n+1} - t_n)\}^2}{\sigma^2(t_{n+1} - t_n)} \right] \\
 &\quad + \log p(y_{t_0}) - \sum_{n=0}^N \log(X_{t_n})
 \end{aligned}$$

上記で推定される係数値 (α, σ) と使用する微小時間間隔 Δt を用いれば、離散化された価格ダイナミクスに対する係数 (u, d, P) を得ることができ、それらの値を用いて確率制御モデルにより、最適伐期齢が探求できる。

価格不確実性下における最適伐期齢

本研究の分析には、日本の原木市場のアカツ、スギ、ヒノキの 1975 年から 1997 年までの月次原木価格を使用した。なお、データ源は林野庁発行「需給報告書」である。図 4 は 1975 年から 1997 年までのアカツ、スギ、ヒノキの木材価格動向を示している。これらの樹種の成長予測に関しては、宮崎県における収穫表を使用し、次式に示すリチャード成長関数を用いて、成長予測を行った。

$$[30] \quad w(t) = M(1 - e^{-at})^b$$

ここでの $w(t)$ はヘクタール当たりの材積であり、 a, b, M は係数である。収穫表のデータに当てはめて得られた係数の値は表 1 に示す通りである。また、成長予測結果は図 5 の通りである。

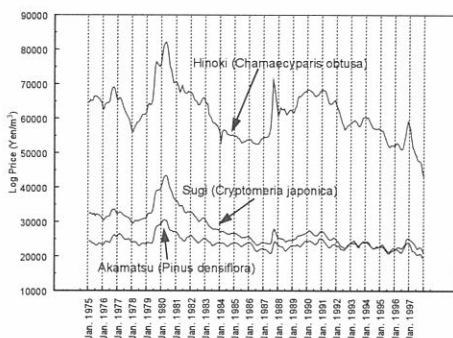


図 4 3 樹種の丸太価格の推移

表1 リチャード成長関数係数推定値

	M	a	b
アカマツ	*376.42300	0.04179	1.65315
<i>Pinus densiflora</i>	**23.07260	0.00641	0.18106
	***16.31470	6.51779	9.13044
スギ	660.95600	0.06745	4.21480
<i>Cryptomeria japonica</i>	2.33626	0.00056	0.04796
	282.91200	119.81000	87.88920
ヒノキ	470.77200	0.05163	2.52526
<i>Chamaecyparis obtusa</i>	16.83980	0.00425	0.19870
	27.95590	12.14340	12.70910

*:係数值、 **: 標準偏差、 ***: t-値

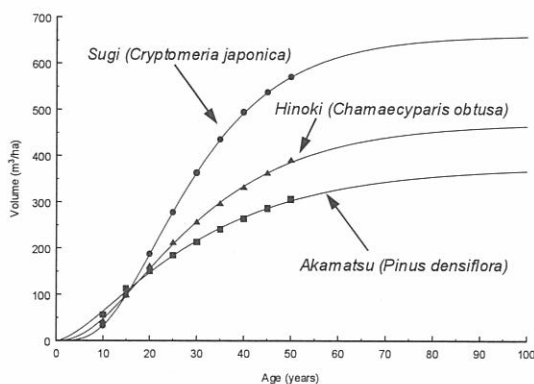


図5 リチャード成長曲線への当てはめ結果

年間経営費は 30,000 円/ha とした。また、一般的に適応される補助金を考慮し、再造林費を 300,000 円/ha とした。なお、これらの価格はシミュレーションを目的として仮定したものであるが、宮崎県では標準伐期齢が 35 年とされており、その結果、上記年間経営費と再造林費の総費用は割引率を考慮せず単純合計すると 1,350,000 円/ha となり、行武・吉本 (2001) が示した経営費 1,418,000 円/ha におよそ近い値となる。シミュレーション分析では割引率を 1% とした。また、土地利用転換による価値は 0 とした。すなわち、

経営の継続による期待収益が負になった場合、「伐採－放棄」行動が決定されることになる。

係数推定については、月次価格データを用いたため、微小時間の長さ $(t_{n+1} - t_n) = \Delta t$ を 1 年基準とし、1/12 とした。 $\Delta t = 1/12$ とし、最尤法により得られた推定値の結果は表 2 に示す通りである。表 2 から分かるように、3 樹種の α に対する t 値は小さく、有意水準 5% で仮説 $\{\alpha \neq 0\}$ が棄却された。そのために、 α が 0 と 0 でない場合に対し、 σ を再度推定し、シミュレーション分析を行った。

表 2 幾何ブラウン運動係数推定値

	α	σ	対数尤度	AIC
	-	0.059716	983.3583	-1964.72
	-	(18.94)		
アカマツ	-0.00463	0.059691	983.4263	-1962.85
<i>Pinus densiflora</i>	(-0.34)	(17.29)		
	-	0.059674	1022.481	-2042.96
	-	(26.860000)		
スギ	-0.02055	0.059447	1023.832	-2043.66
<i>Cryptomeria japonica</i>	(-1.45)	(24.38)		
	-	0.065848	964.6008	-1927.2
	-	(27.49)		
ヒノキ	-0.01614	0.065780	965.2829	-1926.57
<i>Chamaecyparis obtusa</i>	(-1.04)	(24.98)		

(): t 値、AIC: Akaike's Information Criterion (Akaike 1977)

丸太価格の不確実性下における最適伐期齢探求のための確率制御モデルについては、1 期間・2 状態の確率動的計画法に基づき FORTRAN 言語で PC プログラムとしてモデルを構築した。最適伐期齢探求では 1 年を基本単位とした。従って、微小時間単位は 1 年、 $\Delta t = 1$ である。また、比較のため、決定論的な Faustmann の現在価値アプローチ (Faustmann 1849, Samuelson 1976) による解も同時に求めた。この場合、上記モデルにおいて、 $u = d = 1$ 、 $P = 1.00$ となり、最適化方程式は

$$[31] \quad V^F(n, j) = \max\{E_{n,j}^F[W], E_{n,j}^F[H]\}$$

となる。なお、

$$[32] \quad E_{n,j}^F[W] = \frac{V^F(n+1, j+1) - C_a}{1+r}$$

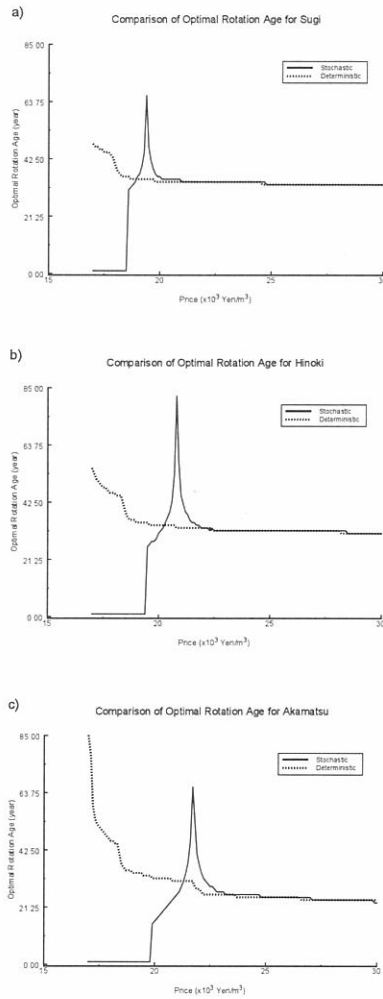


図6 確率制御モデルと決定論的モデルとの比較 a) スギ b) ヒノキ c) アカマツ

$$[33] \quad E^F_{n,j}[H] = S_{1,0} \cdot Q_j + \frac{V^F(n+1,1) - C_a - C_r}{1+r}$$

$V^F(n,j)$ は n 期における j 林齢の森林に対する経営活動から得られる全体の収益の現在価値を表している。 $E^F_{n,j}[W]$ 、 $E^F_{n,j}[H]$ は n 期における j 林齢の「待機」、「伐採」行動を行った場合のそれぞれの現在価値である。ここでは、

価格の不確実性は経営に関わっていないので、不確実性に伴う価格変化は存在しない。最適伐期齢は、現時点において伐採決定を伴った最も若い林齢である。

図6は現時点の丸太価格と算出された最適伐期齢との関係を示している。ここでは確率微分方程式の α は0とした。図6の実線は、確率制御モデルによる解であり、点線は Faustmann 決定論的アプローチによるものである。解の探求では、まず現在の3樹種の丸太価格を 17,000 円/m³ から 47,000 円/m³ に変化させ、それぞれの価格に対して最適伐期齢を探求した。また、分析では伐採費を 8,000 円/m³ とし、100 年を最も古い森林とした。図6の結果から、17,000 円/m³~18,600 円/m³ の価格帯に対して、どの林齢のスギ林においても即座に「伐採-放棄」行動が選択されることが分かった。これは、この価格水準において森林に対する経営行動そのものが負の期待現在価値を導くことを示している。ヒノキは 17,000 円/m³~19,500 円/m³、アカマツは 17,000 円/m³~19,000 円/m³ の価格帯で各々同様な結果になることがわかった。

成林に対し「伐採-放棄」が行われる価格帯、すなわち最適伐期齢が0年より長くなるものについては、スギでは 18,700 円/m³~19,400 円/m³、ヒノキでは 19,600 円/m³~20,800 円/m³、アカマツでは 20,000 円/m³~21,700 円/m³であった。これらの範囲内では、価格が上昇すればするほど、より長く伐採を待つ行動が最適であり、その結果、最適伐期齢が遅れることが分かる。これらの価格帯の上限において、経営が放棄される最適伐期齢は、スギ 66 年、ヒノキ 82 年、アカマツ 66 年となった。なお、「伐採-放棄」が選択される限り、持続的な経営は不可能である。

次に、図6に示すように、最適伐期齢のピーク時を過ぎ（スギでは 19,400 円/m³、ヒノキでは 20,800 円/m³、アカマツでは 21,700 円/m³）、さらに価格が上昇すると「伐採-継続」行動が選択され、持続的な森林資源管理が可能になることが分かる。価格が最終的に上限 47,000 円/m³ になった時点では、スギ、ヒノキ、アカマツの最適伐期齢はそれぞれ 33 年、29 年、20 年に早まるという結果になった。これらの樹種間における価格帯の違いは、成長の仕方の違いに関連しているものと考えられる。より低い価格においては、スギのように成長の早い樹種の方が、アカマツのような成長の遅い樹種より経営

を継続しやすい。すなわち、成長率が価格の減損を相殺していることが分かる。

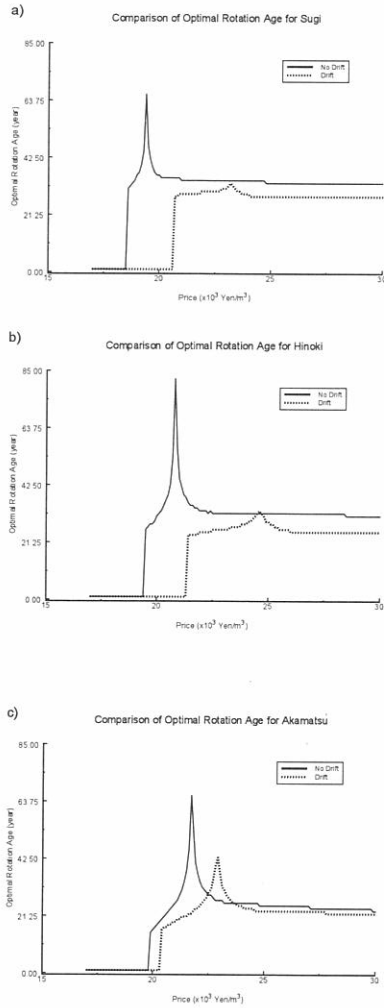


図7ドリフト項の違いによる比較 a)スギ b)ヒノキ c)アカマツ

一方、Faustmann アプローチの結果では、スギ林の最適伐期齢は丸太価格の上昇に伴い、48 年から 33 年に早まることがわかった。ヒノキについては、55 年から 31 年に、アカマツは 85 年から 20 年に早まることがわかった。上記 2 つのアプローチ、確率制御モデルと Faustmann アプローチ、の違いは特に「伐採－放棄」から「伐採－継続」に行動が変化する価格帯において顕著に見られる。

幾何ブラウン運動の方程式の α に 0 以外の値を仮定した場合の結果を図 7 に示す。3 樹種に対する α の値は全て負になったが、このことは将来的に価格が低下する傾向があることを表している。その結果、経営により得られる期待収益の現在価値が 0 以上になるためには、より高い価格水準が保たれなければならない。スギについては、価格帯が 18,600 円/m³～20,700 円/m³、ヒノキは 19,500 円/m³～21,400 円/m³、アカマツでは 19,900 円/m³～20,400 円/m³ の場合に、期待収益がそれぞれはじめて非負になることが分かる。 α の値は、スギで-0.02055、ヒノキで-0.01614、アカマツで-0.00463 であり、それぞれの樹種で異なっているため、上記の価格帯の違いが生じてくる。スギ林については、価格が 23,200 円/m³ の時点（最適伐期齢は 33 年）まで「伐採－放棄」行動が選択された。さらに価格の上昇に伴い、最適伐期齢は 28 年まで早まる結果となった。ヒノキに関しては、価格が 24,600 円/m³ の時、33 年の最適伐期齢ピークを迎え、その後伐期は 24 年まで早まる結果となった。アカマツについては、 α の絶対値が小さいので、他の 2 つの場合と比較すると変化が小さいことが分かる。価格が 22,900 円/m³ になったとき、最適伐期齢のピークが 43 年となり、その後の最適伐期齢は 19 年になった。

結論

本研究では、不確実性環境下での森林資源管理に対する確率制御モデルを構築した。近年、地方の森林所有者にとって森林資源の経営環境は益々不安定なものとなってきている。その結果、所有者は森林管理を継続しない、すなわち、伐採後再造林を放棄する傾向が顕著に出てきている。ここで考案した確率制御モデルは森林資源管理における最適伐期齢決定問題を取り扱うも

のである。不確実性は丸太価格のダイナミックスにおいてのみ仮定し、一般的に利用されている連続確率過程の1つである幾何ブラウン運動を用いて価格のダイナミックスを捉えた。確率制御モデルの構築には、得られた幾何ブラウン運動を二項過程により近似し、1期間・2状態の確率動的計画法を用いた。ここでは、植林か、林地転用による経営放棄かというオプションを考慮し、「待機」、「伐採－継続」、「伐採－放棄」行動を選択するモデルにより、最適伐期齢を探索した。

一般に価格は最適伐期齢決定に重要な役割を果たすが、本研究の分析の結果、最適行動が「伐採－放棄」から「伐採－継続」に転換する価格帯では、最適伐期齢が大幅に遅延することが分かった。この時、Faustmannアプローチから得られる結果と最も乖離することが分かった。すなわち、この価格帯においては、価格の不確実性を考慮し、経営戦略を打ち立てる必要があると言える。この価格帯から価格がさらに下落すれば、確率制御モデルから得られる最適行動は「伐採－放棄」となり、最適伐期齢は早くなるのに対し、Faustmannアプローチの場合はさらに最適伐期齢が長くなるという結果になった。この違いは、ここで構築した確率制御モデルにおいて経営放棄という経営オプションを導入したからである。このオプションを行使することにより、価格低下による損失を早めの「伐採－放棄」により一層減少させることができる。丸太価格が十分に高いとき、確率制御モデルおよびFaustmannアプローチによる最適伐期齢はほとんど同じになった。

価格が下落傾向にあるとき、最適伐期齢は全体的に早まることが分かった。これは将来の収益に対する減価低落効果の結果である。言い換えれば、価格の下落傾向は将来価格の減少の可能性を増大させるため、下落傾向でない場合と比較すると、将来の伐採による期待収益が低くなる。そのために伐期は早くなる訳である。

α の値が0と仮定した場合とそうでない場合に解の違いが生じることは、用いる連続型確率モデルにより、最適経営に対する意思決定が異なってくるということの意味する。始めに述べたように、幾何ブラウン運動のメリットは解析的な解があり、比較的取り扱い易い点にある。しかしながら、係数推

定における僅かな変化が、結果に大きな変化をもたらす以上、さらなるモデル選択の分析を行う必要であろう。

本研究の結果は、どちらかというと大まかに仮定したデータに基づくものであるが、実際の再造林費用、伐採費用、その他毎年の経営費用などを近似しているものである。今度さらに正確な分析を行うには、森林資源管理に関わる費用構造や適切な林業補助金についてのより多くのデータ分析が必要不可欠となる。

引用文献

- Akaike, H. 1977. On entropy maximization principle, pp.27-41, In Application of Statistics, (Krishnaiah, P.R. ed), North-Holland, Amsterdam, 543p.
- Bailey, W. 1991. Valuing agricultural firms: An examination of the contingent-claims approach to pricing real assets, *Journal of Economic Dynamics and Control* 15:771-791.
- Brennan, M.J. and Schwartz, E.S. 1985. Evaluating natural resource investments, *Journal of Business* 58:135-157.
- Clarke, H.R. and Reed, W.J. 1989. The tree-cutting problem in a stochastic environment. *Journal of Economic Dynamics Control* 13:569-595.
- Cox, J.C., Ross, S.A. and Rubinstein, M. 1979. Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics* 7: 229-263.
- Faustmann, M. 1849. On the determination of the value which forest land and immature stands possess for forestry, In Martin Faustmann and the Evolution of Discounted Cash Flow, (Gane, M. ed.), Institute Paper of the Commonwealth Forestry Institute, 42.
- Haight, R.G. and Holmes, T.P. 1991. Stochastic price models and optimal tree cutting results for loblolly pine. *Natural Resource Modeling* 5:423-443.
- Hillier, F.S. and Lieberman, G.J. 1990. Introduction to operations research, McGraw Hill, New York, 954p.
- Gardiner, C.W. 1985. Handbook of stochastic methods, Springer, New York, 442p.

- Morck, R., Schwartz, E., and Stangeland, D. 1989. The valuation of forestry resources under stochastic prices and investments, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 24:473-487.
- Øksendal, B. 1995. *Stochastic Differential Equations*, Springer, New York, 271p.
- Plantinga, A.J. 1998. The optimal timber rotation: An option value approach. *Forest Science* 44:192-202
- Reed, W.J. and Clarke, H.R. 1990. Harvest decisions and asset valuations for biological resources exhibiting size-dependent growth. *International Economic Review* 31:147-169.
- Reed, W.J. and Ye, J.J. 1994. The role of stochastic monotonicity in the decision to conserve or harvest old-growth forest. *Natural Resource Modeling* 8:47-79.
- Richards, F.J. 1958. A flexible growth function to empirical use, *Journal of Experimental Botany* 10:290-300.
- Ross, S.M. 1983. *Introduction to stochastic dynamic programming*, Academic Press, New York, 164p.
- Samuelson, P.A. 1976. Economics of forestry in an evolving society, *Economic Inquiry* 14: 466-492.
- Thomson, T.A. 1992. Optimal forest rotation when stumpage prices follow a diffusion process, *Land Economics* 68:329-342
- Thorsen, B.J. 1999. Afforestation as a real option: Some policy implications. *Forest Science* 45:171-178
- Yoshimoto, A. and Shoji, I. 1998. Searching for an optimal rotation age for forest stand management under stochastic log prices, *European Journal of Operational Research* 105:100-112
- 行武 潔・吉本 敦 2001. 国産材供給における木材生産の費用分析、*森林計画学会誌*、Vol.35: 75-80
- Zinkhan, F.C. 1991. Option pricing and timberland s land-use conversion option, *Land Economics* 67:317-325

