

擬似球としての樹幹表面

Stem surface as a Quasisphere

鈴木 太七
Suzuki, T.

キーワード： 擬似球、定差図、幹曲線、S-S折線、Huygensの原理、樹幹Heaviside関数、線形同次一階の偏微分方程式の弱い解

要約： 樹幹の根元の円盤の中心を原点とする。原点から垂直に高さ z まで、さらにそこから水平に半径 r の樹幹表面までとった直線を、S-S折線と名付ける。S-S折線上の2点間の隔たりを、樹幹がその区間を生長するに要する時間で距離づけることにすると、樹幹表面のすべての点は、原点から等距離にある。その意味で、樹幹表面は擬似球 Q である。年齢 t の擬似球の方程式は

$$t = \psi^{-1}\left(\frac{z}{H}\right) + \varphi^{-1}\left(\frac{r}{R(z)}\right)$$

と書かれる。ここで $H, R(z)$ は、それぞれ樹高と高さ z での半径生長の極限、また ψ^{-1} と φ^{-1} とは、それぞれ樹高と半径 r の生長関数の逆関数である。

樹幹 Q の一種の特性関数 u を3変数 t, z, r の関数として

$$u(t, z, r) = \begin{cases} 1 & (t, z, r) \in Q \text{ のとき} \\ 0 & (t, z, r) \notin Q \text{ のとき} \end{cases}$$

で定義して、樹幹のHeaviside関数と名付けると、 u は線形同次一階の偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dz}{d\tau} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{dz}{d\tau} \frac{R'(z)}{R(z)} r \frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

の‘弱い解’となり、樹幹表面はその特性曲面となる。言い換えれば、解 $u = 1$ は樹幹表面で不連続に、 $u = 0$ に飛躍する。したがって、樹幹表面は、樹幹生長に対して一種の波面前線と見做すことができる。

Abstract: Consider a tree trunk. One may imagine a broken line consisting of two straight segments. The one is a perpendicular ascending from the centre of its

base disk to the centre of the disk at the height z , and the other a horizontal stretching from there to the stem surface of radius r . We will call the line a "S-S broken line". If the distance between two points A and B on the same S-S broken line is defined in terms of time necessary for the tree tissue to spread over the interval (A, B), all the points of the stem surface are equidistant from the centre of the base disk. This means a stem surface a kind of a sphere. We will call it a stem quasisphere Q . An equation of the quasisphere Q at age t is

$$t = \psi^{-1}\left(\frac{z}{H}\right) + \varphi^{-1}\left(\frac{r}{R(z)}\right).$$

in which $H, R(z)$ are limiting values of the stem height and of the radius r of the height z , and ψ^{-1}, φ^{-1} the inverses of the growth curves of the stem height z and of the radius r at the height z , respectively.

Let us define a kind of index function $u(t, z, r)$ of three variables age t , height z and the radius r as

$$u(t, z, r) = \begin{cases} 1 & \text{if } (t, z, r) \in Q \\ 0 & \text{if } (t, z, r) \notin Q \end{cases}$$

We call it a stem Heaviside function. Then u is a 'weak solution' of a linear homogeneous partial differential equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dz}{d\tau} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{dz}{d\tau} \frac{R'(z)}{R(z)} r \frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

in which $\frac{dz}{d\tau}$ is a gradient of its stem curve, and the stem surface is a characteristic surface of the equation. In other words, the solution $u = 1$ jumps into another solution $u = 0$ discontinuously on the stem surface. Therefore the stem surface can be regarded as a kind of 'wave front' of its growth.

Keywords: Quasisphere, difference diagram, stem taper curve, S-S broken line, Principle of Huygens, Stem Heaviside's function, weak solution of linear homogeneous partial differential equation of the first order

この研究の主要部分は、1995年以來、3回に亘って Forstliche Biometrie の学会で発表して来たものでありますが (Suzuki 1995, Suzuki 1996, Suzuki 1998)、今回の学会を機に、改めてそれを考え直し、整理していくつかの補足をし、一応これで宜かろうと思えるものができたので、お話ししたいと思います。暫くの間ご静聴をお願いします。

一体、樹木の年輪と言いますと、通常は樹幹を横断した円板、ちょうどドイツケーキのバウム・クーヘンのようなものを想像しますが、年輪は実はだ

んだんに大きくなってゆくアイスクリームのコーンを積み重ねたような構造をもっているのであります。以下の話の内容は結論として「年齢という尺度によれば、樹幹表面はすべて根元の中心から、同じ距離にある、すなわち、おなじ年齢である」ということなのであります。年齢が何故距離と見做せるかについては追々ご説明して参りますが、樹幹表面がある一定の点から等しい距離にあるということから、これを擬似球 Quasisphere と名付けることにしました。幾何学では一定なプラスの全曲率をもった球 Sphere に対して、一定なマイナスの全曲率をもった曲面を擬球 Pseudosphere といいます。これは双曲的非ユークリッド幾何のモデルとして用いられています。しかし、ここで言う擬似球はそれとは違ったものであります。Wörterbuch Mathematik には、Quasisphere = Quasikugel という単語は載っていますが、これが私が定義しようとしたものであるかどうかは判りません (Eisenreich und Sube 1982)。岩波の数学事典その他、日本の文献では Quasisphere という名称を見付けることはできませんでした。しかし、この名称は如何にも私の表現したいものの本質を表すのに相応しいと思いましたので、敢えてこれを用いることにした次第であります。

樹幹の半径生長に関する定差図

旧帝室林野局の倉田吉雄先生は、1939年に「神宮備林の法正状態に関する研究」を学位論文として提出されました (倉田 1939)。これは伊勢神宮の20年毎の遷宮に使う木曾ヒノキ用材を調達するために必要な備林の規模とその経営方針を決めようという研究でした。そのため当然木曾ヒノキの生長を推定することが必要となり、その資料として、50年生から390年生に亘る86本の木曾ヒノキの胸高直径の生長記録が付表として貼付されておりました。私は前後10年ほど先生の助手を務めさせていただきましたが、その折りにこの論文を頂戴し、将来そのデータを自由に使って宜しいというお許しをいただいております。

一方、私は自分の学位論文を、嶺一三先生と増山元三郎先生に審査していただいたのでありますが、その関係で増山先生のご研究のいくつかを知る機会をもちました。その中に「ある種の患者の白血球数の増加が単分子反応

の反応速度方程式に従うものとする、その定差図が直線になる」という、いわゆる定差図法が紹介されておりました(増山 1948)。すなわち、ある量 $x(t)$ の生長が

$$[1] \quad \frac{dx(t)}{dt} = k(M-x), \quad t = \text{時間}, \quad k, M = \text{定数}$$

に従うとすると、それから定差直線

$$[2] \quad x(t+1) = e^{-k}x(t) + M(1 - e^{-k})$$

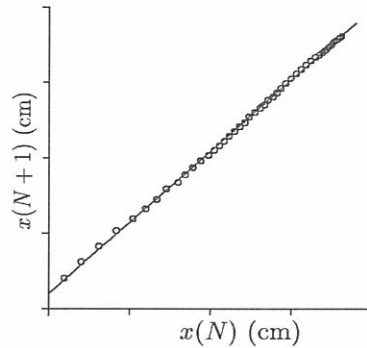
が得られるという内容であります。

その後、私は林地肥培の研究に加えていただき、施肥の前後における生長の違いをこの定差直線で判定できないだろうかと考えました。そこで、試みに倉田先生の木曾ヒノキのデータについて定差図を描いたところ、そのデータのすべてが驚く程見事に定差直線になることを知りました。図1はそのような定差図の一例であります(徐 1988)。

そこで増山先生の議論とは逆に、定差図が直線になるということ、すなわち、定差直線の方程式

$$[3] \quad x(t+1) = ax(t) + b$$

を始めに考えて、これを差分方程式として解いて見たところその解が単分子反応の速度方程式となることが証明できました。そこでそ



うした定差図を利用して、上述の 図1. 定差図の一例(徐 玉河原図) ような肥培の効果とか、逆に有毒排ガスによる林木被害の有無とかの判定をすることができたのであります(鈴木 1961, Suzuki 1985)。また定差図が直線になるという事実は胸高だけでなく樹幹のすべての高さの断面の半径生長についても、また樹高生長についても同じように確かめることができました。私はこのような生長法則を Mitscherlich の法則と呼ぶことにしました。

Mitscherlich の法則

Mitscherlich というのはドイツでは有名な学者の家系で、同じ姓をもった学者が沢山いて紛らわしいのですが、ここで言うのは、Eilhard Alfred Mitscherlich (1874～1956)という人であります。この人物は農芸化学者Liebigの肥料試験研究を受け継ぎ、第2次世界大戦後にはBerlin農事試験場長、Humboldt大学教授などを務め、旧東独の時代にまで活動していた思ったより最近の人であります。

J. von Liebig (1803～1873)は化学者として、化学反応の生成物がその反応に関与するすべての成分のうちの相対的最小成分によって決まるという事実から、植物に対する肥料成分の効果も、その中の相対的最小成分によって決まるという、いわゆる、最小因子説 minimum factor theory を提唱したので知られています。この場合、最小因子 x に対して、最終収量 y は比例関係にありますが、因子 x が十分に大きくなって、それが最小因子でなくなると、収量 y は x に無関係に一定になります(図2)。

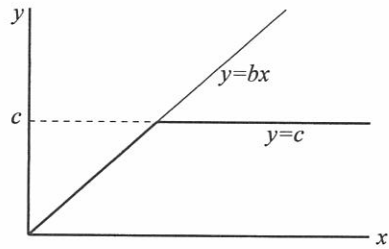


図2. Liebigの法則

これに対してMitscherlich はプランター栽培による精密な肥培試験によって、最終収量 y は、最小因子 x に対して、単分子反応速度方程式

$$[4] \quad \frac{dy}{dx} = k(M - y), \quad k, M = \text{定数}$$

に従うという修正を行ったのであります(Plesse und Rux 1982)。

私は上述の生長式 [1] では、年齢がこの最小因子 x の代わりをしていると見做すことができると考えたのであります。

後になってL.von Bertalanffyが、植物の体積を v としたとき、その生長速度は、一方は光合成などのよ

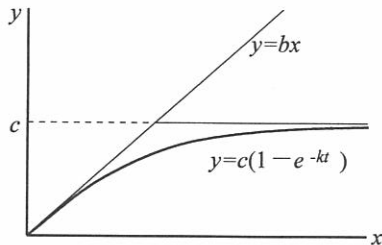


図3. Mitscherlichの法則

うなその表面積 $v^{(2/3)}$ に比例するプラスと、他方は呼吸などのような体積 v に比例するマイナスとの差であると考えていたことを知りました。このとき、その生長方程式は

$$[5] \quad \frac{dv}{dt} = \alpha v^{\frac{2}{3}} - \beta v$$

で表されることになります (Bertalanffy 1952)。方程式 [5] はよく知られた Bernoulli の方程式であります。ここで単純に、体積 v が直径 x の 3 乗に比例する

$$[6] \quad v = kx^3$$

と置くと、これから Mitscherlich 式

$$[7] \quad \frac{dx}{dt} = \frac{(\alpha k^{\frac{2}{3}} - \beta x)}{3}$$

が得られます。このことから、私が樹木の直径の生長を Mitscherlich 式に従うとしたことが、全く根拠の無いことでもなかったと意を強くしたのであります (鈴木 1979, Suzuki et al. 1983)。

長嶋 郁さんの研究

名大の森林経理の研究室では、昭和 40 年代の前半毎週一回のゼミに全員が熱中しておりました。そうしたゼミの中で長嶋郁さんが、林木の直径と樹高について同じように Mitscherlich 式を仮定すれば、理論的幹曲線が得られるということを発表されたのであります。これは素晴らしいアイデアであり、これからお話することのスタートとなったのであります。後の説明との関係で符号を少し変えましたが、その要点を言うと

「Mitscherlich の法則に従って生長する樹木の年齢 t における樹高を

$$[8] \quad H_t = H \left(1 - e^{-\alpha t} \right)$$

とすると、その年齢 τ のときの樹高は

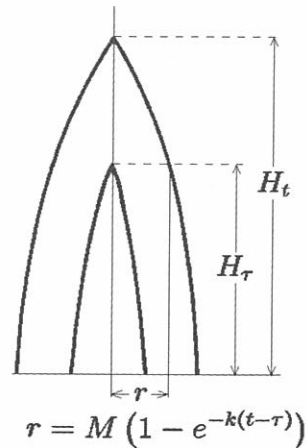
$$[9] \quad H_\tau = H \left(1 - e^{-\alpha \tau} \right)$$

である。さらにすべての高さの断面において、その半径もまた、Mitscherlichの法則に従うものとするれば、高さ H_τ での半径は

$$[10] \quad r = M \left(1 - e^{-\beta(t-\tau)} \right)$$

で与えられる(図4)。以上の3式から t, τ を消去すれば

$$[11] \quad r = M \left[1 - \left(\frac{H - H_t}{H - H_\tau} \right)^{\frac{\beta}{\alpha}} \right]$$



が得られる。これは理論的な幹曲線 図4. 長嶋の幹曲線(長嶋 郁原図)である。」というものでありました(長嶋1991)。

この発表をうかがったときの私の意見は、たしかにこの理論は面白いが、本当を言うと[10]式の M は H_τ の関数でなければならない。このままでは、[10]式によって、 $t \rightarrow \infty$ とすると、その幹曲線は根元から梢端まで同じ太さの円柱になってしまう。だから M が H_τ のどのような関数であるかわからなければ、幹曲線は得られない。それを理論的幹曲線とは言えないのではなかろうかというものでありました。

しかし、そうは言ったものの長嶋式は M =一定の条件の下で、Mitscherlich式を利用したもので、 M を H_τ の関数としたような場合については、それ以上はどうにも議論を進めることができなかったのであります。

そして、今になって考えてみると、そこにはもっと重大な見落としがあったのであります。それは長嶋法が t と τ と両方の変数を一挙に消去してしまったという点であります。そのような事が出来たのは、固定した M の場合に限ったことであったのであります。しかも t を消去してしまうことによって、樹幹が年齢 t によってどう変化するかという生長方程式として一番面白い部分を消してしまっていたのであります。そのことに気付いたのは、1995年に上述しました一連の論文の最初のものを書いたときのことのであります。

S-S折線

Göttingen大学のB. Sloboda氏は、図5に示すように樹幹の根元の中央を原点として、そこから射出する直線をとって、その上に同一年齢の点を取り、それで樹幹形を表わさうと考えていました。このことは若い時からのアイデアらしく、彼の論文には何時もこのような図が出て参ります。これもまた面白い考えでありまして、それによって前に申しましたように、樹幹表面の組織の年齢がすべて同じであるということを改めて認識させられた訳であります(Sloboda 1976)。

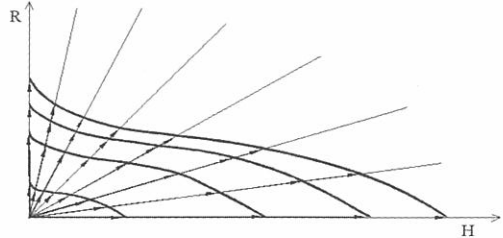


図5. Slobodaの幹曲線(Sloboda原図)

Sloboda氏と私は樹幹表面の形と船の航跡に出来る波群との類似を考えて、これを表すことのできるような波動方程式を模索して、何度も議論を重ねました。しかし私の意見としては、樹幹は模式図6に示すような構造をしていますから、材幹の中心軸はある高さまで鉛直に生長し、その高さでの半径肥大生長は、水平な方向に同心円となる。したがって、Sloboda氏の考えるような生長線は、実は図7に示すようなものでなくてはならないというものでした。

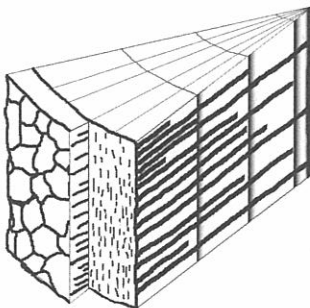


図6. 樹幹縦断面の模式図

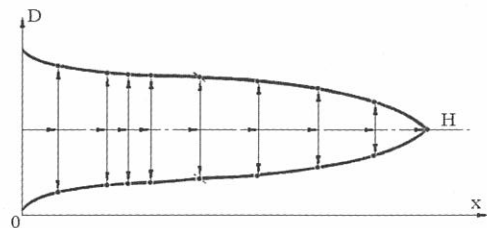


図7. S-S折線(Sloboda原図)

しかし、このような線は、中心軸上で直角に屈折するため導関数が不連続になって、数学的には取り扱いが出来ず、共同研究はそこでストップしてし

まいりました。このような生長線は、以下の議論の中でしばしば引用する必要がありますので、私自身はSloboda氏との共同研究を記念する意味で、S-S折線と呼ぶことにしています。

擬似球の方程式

私はそれから間もなくS-S折線には、長嶋氏の理論を使えばよいと気付きました。すなわち、S-S折線は高さ方向に τ 年間 H_τ まで伸長し、そこから半径方向に $t-\tau$ 年生長するとすればよいと考えた訳であります。但し、ここでは生長を必ずしもMitscherlich式とは限定しないことにしました。Mitscherlich式は林業の実際に使うには十分なものでありますが、ごく幼齢の時期には当て嵌まりが十分とは言えません。ところがS-S折線を論ずるような場合には、その幼齢時の生長が、問題になってしまうのであります。

しかし、一方ではMitscherlich式のように半径、樹高ともその生長の極限をとって、それとの比として無次元の量を取り扱うことが良いということも考えました。

そこで、樹高生長の極限を H として年齢 τ までの樹高生長を

$$[12] \quad \frac{z}{H} = \frac{H_\tau}{H} = \psi(\tau)$$

また、高さ z での半径生長の極限を $R(z)$ として、高さ H_τ での $t-\tau$ 年間の半径方向の生長を

$$[13] \quad \frac{r}{R(z)} = \varphi(t-\tau)$$

と置きました。そこでそれぞれの逆関数をとると

$$[14] \quad \tau = \psi^{-1}\left(\frac{z}{H}\right)$$

$$[15] \quad t - \tau = \varphi^{-1}\left(\frac{r}{R(z)}\right)$$

でありますから、これらから τ を消去して、一つの関係式

$$[16] \quad t = \psi^{-1}\left(\frac{z}{H}\right) + \varphi^{-1}\left(\frac{r}{R(z)}\right)$$

を得ました。これを別の書き方にすれば

$$[17] \quad r = R(z) \varphi \left(t - \psi^{-1} \left(\frac{z}{H} \right) \right)$$

となります。これは年齢 t 、高さ Z での半径を与えます。すなわち、年齢 t での幹曲線を与えている訳であります。前に長嶋氏がせっかくの t を消去してしまっただのに対して、この形の式のように t を残して置く方が良かったのであります。しかし、[17] の式は既に Mitscherlich の生長方程式を前提とせず、高さ z での半径の生長の上限も自由なものとしてよいことになりました。

同じ S-S 折線上の 2 点の隔たりを、樹幹がその区間を生長するに要する年数で距離づけることにすると、前に申しましたように樹幹表面のすべての点は、同一年齢でありますから、根元の円盤の中心から等距離にあると言うことができます。その意味で、樹幹表面を擬似球面と呼ぶことができるのであります。[16] 式あるいは [17] 式はこのような擬似球面の方程式なのであります。以下これを擬似球面 S と言うことにします。

樹幹表面の偏微分方程式

上記の樹幹表面は、その年齢 t によって動いていますから、つぎにその運動を表現する方程式を求めることにしました。

まず、[13] 式の分母を払った

$$[18] \quad r = R(z) \psi(t - \tau)$$

の右辺に含まれる変数 τ は、[12] 式から知られるように、変数 z のみの関数であることに注意して、 r を z, t に関して偏微分すると、

$$[19] \quad \frac{\partial r}{\partial z} = R'(z) \psi(t - \tau) - R(z) \psi'(t - \tau) \frac{d\tau}{dz}$$

$$[20] \quad \frac{\partial r}{\partial t} = R(z) \psi'(t - \tau)$$

が得られます。[20] 式を [19] 式に代入し、[18] 式を含めて考えると、

$$[21] \quad \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{dz}{d\tau} \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{dz}{d\tau} \frac{R'(z)}{R(z)} r$$

という線形一階の偏微分方程式が得られます。

この方程式の特性曲線は

$$[22] \quad \frac{dt}{1} = \frac{dz}{\frac{dz}{d\tau}} = \frac{dr}{\frac{dz}{d\tau} \frac{R'(z)}{R(z)} r}$$

であります。その初めの二項を等置すると

$$[23] \quad dt = d\tau$$

となり、その第一積分として

$$[24] \quad t - \tau = a$$

また、後の二項から

$$[25] \quad \frac{R'(z)}{R(z)} dz = \frac{1}{r} dr$$

を得、そしてその第一積分が

$$[26] \quad \frac{r}{R(z)} = b$$

となります。したがって、その一般解は ψ を任意関数として

$$[27] \quad r = R(z) \psi(t - \tau)$$

となります。これは [18] 式そのものであります。すなわち、偏微分方程式 [21] は、樹幹表面の方程式 [18] と等価なのであります。以上の偏微分方程式の一般解に関する説明は、通常の教科書に記載がありますので、ここでは説明を省略します (Duff 1956, Erwe und Peschl 1972, 寺澤 1960)。

極限幹曲線式 $R(z)$

つぎに、高さ z での半径生長の上限 $R(z)$ を、何らかの考え方で設定しなければなりません。しかし、 $R(z)$ については既に全く別の観点から一つの理論式が出来ていたのであります。すなわち、「樹幹は自然の猛威にさらされながら、長年月それに耐えて直立している。だから、少なくとも力学的に

自重による座屈に耐えうるものでなければならない」筈であります。ところで円柱の座屈に関しては

$$[28] \quad \frac{\ell^3}{r^2} \leq \text{const}$$

という条件が成り立たねばならないことが判っています(松村 2003, 山本ら 1984)。それならば樹幹の高さ z での半径 $R(z)$ が常にそれより上の長さ $H-z$ の円柱を支えて座屈せずにいるためには樹幹のすべての高さ z について、不等式

$$[29] \quad \frac{(H-z)^3}{R(z)^2} < \text{const}$$

が成り立っていれば十分です。そこで簡単に

$$[30] \quad R(z)^2 = k(H-z)^3$$

という極限幹曲線式を想定することにしたのであります。この式で、 $z=0$ とすると、根元の半径 R について

$$[31] \quad R^2 = R(0)^2 = kH^3$$

となりますから、

$$[32] \quad \frac{R(z)}{R} = \left(1 - \frac{z}{H}\right)^{\frac{3}{2}}$$

が得られ、これから更に

$$[33] \quad \frac{R'(z)}{R(z)} = -\frac{3}{2}(H-z)$$

と置いてよいことが判ります。この関係によって、上の [21] 式の右辺の係数関数が定まりました。

一般的な幹曲線式

このような $R(z)$ を用いたとき、[13] 式は

$$[34] \quad \frac{r}{(H-z)^{3/2}} = \varphi(t-\tau)$$

となります。ここで右辺の生長法則として Mitscherlich 式より一般的な Bertalanffy 式、いわゆる Richards 式を採用してみます。すなわち

$$[35] \quad \varphi(t-\tau) = \left\{ 1 - e^{-k(t-\tau)} \right\}^{\alpha+1}$$

と置くと、これから

$$[36] \quad r = (H-z)^{\frac{3}{2}} \left\{ 1 - e^{-k(t-\tau)} \right\}^{\alpha+1}$$

が得られます。樹高についても同じく Richards 式を使うことにすると

$$[37] \quad \frac{z}{H} = \psi(\tau) = \left\{ 1 - e^{-h\tau} \right\}^{\beta+1}$$

となりますから、これから

$$[38] \quad e^{-h\tau} = 1 - \left(\frac{z}{H} \right)^{\frac{1}{\beta+1}}$$

これを [37] 式に代入して

$$[39] \quad r = (H-z)^{\frac{3}{2}} \left\{ 1 - \frac{e^{-kt}}{\left\{ 1 - \left(\frac{z}{H} \right)^{\frac{1}{\beta+1}} \right\}^{\frac{k}{h}}} \right\}^{\alpha+1}$$

が得られます。これが Richards 式を生長法則としたときの幹曲線式であります。このような式は複雑すぎて、実用的にはあまり意味が無いかも知れませんが、必要があればコンピューターで簡単に数値計算が出来ます。

材積の生長法則

簡単のため樹高生長、半径生長がともに Mitscherlich 式に従うとします。すなわち $\alpha = \beta = 0$ と置きます。しかも、そのパラメータ k, h は同一の樹木の生長の活力を意味するものとして同じ $k = h$ だと仮定します。その場合には [36] 式と [37] 式はそれぞれ

$$[40] \quad r = H^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{z}{H}\right)^{\frac{3}{2}} \left\{1 - e^{-k(t-\tau)}\right\}$$

と

$$[41] \quad z = H \left(1 - e^{-k\tau}\right)$$

となりますから、これらの式から $e^{-k\tau} = 1 - \frac{z}{H}$ を消去すると、

$$[42] \quad r = H^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{z}{H}\right)^{\frac{3}{2}} \left\{1 - \frac{e^{-kt}}{1 - \frac{z}{H}}\right\}$$

が得られます。この式は任意の高さ z での半径生長もすべて Mitscherlich 式に従っていることを示しています。

この幹曲線を回転したときの回転体としての材積 V は

$$[43] \quad V = \int_0^z \pi r^2 dz$$

となりますが、ここで

$$[44] \quad z = H \left(1 - e^{-k\tau}\right)$$

すなわち、

$$[45] \quad \frac{dz}{d\tau} = k(H - z)$$

であることを用いますと、簡単な積分計算によって

$$[46] \quad V = \int_0^z \pi r^2 dz = \int_0^t \pi r^2 k(H - z) d\tau = \frac{\pi H^3}{3} \left(1 - e^{-3kt}\right)$$

が得られます。これは樹木の材積もまた Mitscherlich 式に従って生長するというを示しております。まったく違った根拠によるものでありますが、南雲秀次郎さん、竹内公男さんも同じように材積生長が Mitscherlich 式に従うという結論を出しておられます(南雲・佐藤 1965, Takeuchi 1981)。 $\alpha, \beta \neq 0$ でしかも $h \neq k$ の場合についても、同じような計算が可能ではありますが、実際的には数値積分によって近似することになると思います。

以上で、一応この話の実用的な面の説明を終えたのでありますが、理論的にはもっとずっと面白いことが残っておりますので、もう少し話を続けさせて頂き度いと思います。

Huygensの原理と樹幹の生長

ある媒質の中を拡がって行く光とか音とかといった一つの攪乱 excitation を考えてみます。その空間の一点は始めは静止の状態にありますが、攪乱がその点まで拡がってくると、励起の状態になります。そして一度励起された点は、今度は新しい攪乱の震源となって励起を周囲に拡散させて行きます。その時、攪乱が一点から他の点に拡散して行く経路は、それに沿ってそれが最も速く、言い換えれば2点間を最短時間に行けるようなものでなくてはなりません。何故なら、ある点が既に励起してしまった後になって、其処に届くような励起はこの場合には意味がないからであります。これが有名な Huygens の原理で、光の反射、屈折などの現象をよく説明することはご承知のところと存じます (Gelfand and Fomin 1963)。

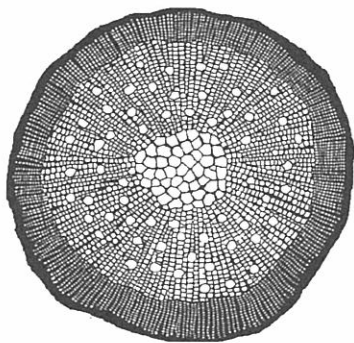


図8. 樹幹横断面の模式図

さてここで話をわれわれの樹幹に戻しますと、樹幹細胞の増殖による樹幹の生長は、まさにここで考えられたような攪乱の伝播に類似していることに気がきます。すなわち樹幹表面の細胞列は内部から増殖してくる細胞によってつぎつぎに励起されているのであります (Braun 1988, Strasburger 1983)。樹幹細胞の場合には励起は根元の原点から樹幹表面上の高さ

z までの [14] 式で与えられる時間 τ と、

半径 r の点までの [15] 式で与えられる時間 $t - \tau$ との合計として、S-S折線に沿って最短時間

$$[47] \quad t = \psi^{-1}\left(\frac{z}{H}\right) + \varphi^{-1}\left(\frac{r}{R(z)}\right)$$

で到達することは、変分学を用いなくても、図6、図7、図8を見ただけで

明らかであります。こうしてS-S折線の全体が鉛直な樹幹の中心柱から、水平に四方に伸長する射線の系からなる一つの場をつくっていることとなります。そこでの距離はS-S折線に沿って2点を結ぶために必要な時間で測られることとなります。このことが前から繰り返して申して来た事の内容であります。この距離は一種の測地線 geodesic であり、その距離の本質は時間だったのであります。

樹幹の特性関数 $u(t, z, r)$

攪乱の拡大という考え方によって Huygens の原理を説明しましたが、その際に時刻 t に空間の一点 (x, y, z) が励起の状態にあったら値1、まだその時に励起の状態になかったら値0をとる $u(t, x, y, z)$ という関数を考え、攪乱の拡大を関数 u の変化として捉えることができます。樹幹の生長という現象は、それが中心軸に対して対称ですので、上と同様に $u(t, z, r)$ という関数をとって、木材としての樹幹が時刻 t に (z, r) という点に有ったら値1、無かったら値0をとるとし、以下、これを樹幹のヘビサイド関数 Heaviside's function と呼ぶことにします。それが数値として0と1としかとらず、樹幹表面で1から0に不連続にジャンプする性質が、まさに一次元の Heaviside 関数と同じようだからであります。

すなわち、樹幹の Heaviside の関数は

$$[48] \quad u(t, z, r) = \begin{cases} 1 & (t, z, r) \in Q \quad \text{のとき} \\ 0 & (t, z, r) \notin Q \quad \text{のとき} \end{cases}$$

と定義できます。これらを t と z に関して微分すると

$$[49] \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial t} = 0$$

$$[50] \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} = 0$$

が得られますから、これを樹幹表面の微分方程式 [23] に代入しますと、 u に関する一階の線形方程式

$$[51] \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{dz}{dt} \frac{R'(z)}{R(z)} r \frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

が得られます。この式は u に関して同次で Hamilton-Jacobi の方程式と呼ばれるものになっております。この方程式に対して

$$[52] \quad u \equiv 1, \text{ あるいは } u \equiv 0$$

はそのすべての偏導関数が 0 でありますから、それぞれが [51] 式の解であります。しかも、空間のある領域についてそれぞれが Cauchy-Kowalewskaja の条件を満足する限りそこでは一意的な解になります (Duff 1956, Petrovsky 1954)。しかし、ここでわれわれが問題にしている樹幹表面のように、 $u \equiv 1$ から突然 $u \equiv 0$ にジャンプしてしまうような場合には、そこで関数は不連続となり、当然その導関数も存在せず、そもそも微分方程式そのものが無意味となってしまうのであります。

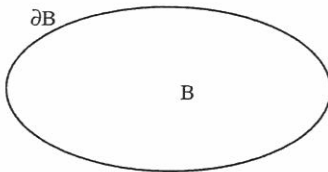
この点がこの問題の最大の難所でありました。

一階の同次線形偏微分方程式の“弱い解”

問題はすべての一階の同次線形偏微分方程式について同じ事が成り立ちますので、記号を簡単にして

$$[53] \quad a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

という方程式に就いて述べます。ここで係数 a, b, c は独立変数 x, y, z の関数であります。 a, b, c を成分とするベクトルを μ と置きます。



x, y, z の空間のある領域 B をとり、 B の境界を ∂B とします (図 9)。方程式 [53] の左辺は、関数 u に線形な微分作用素 L

図 9. 領域 B と B の境界 ∂B

を作用させたもの、すなわち

$$[54] \quad L(u) = a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial u}{\partial z}$$

であります。また、 L に共役な作用素 M を、

$$[55] \quad M(v) = \frac{\partial(av)}{\partial x} + \frac{\partial(bv)}{\partial y} + \frac{\partial(cv)}{\partial z}$$

とします。ただし関数 v は境界 ∂B 上およびその外側ではゼロ 0 となるが、領域 B 上では任意の値をとるとします。そこで $L(u), M(v)$ にそれぞれ v と u を乗じて差をとると

$$[56] \quad vL(u) - uM(v) = \frac{\partial(auv)}{\partial x} + \frac{\partial(buv)}{\partial y} + \frac{\partial(cuv)}{\partial z}$$

となりますが、これはベクトル $uv(a, b, c) = uv\mu$ の発散 (divergence) となります。この発散を領域 B 全体について積分すると、Gauss の発散の定理によって、それは境界 ∂B 上の法線方向の成分の積分になります。すなわち

$$[57] \quad \begin{aligned} \iiint_B (vL(u) - uM(v)) d\sigma &= \iiint_B \operatorname{div}(uv\mu) d\sigma \\ &= \iint_{\partial B} uv\mu v dS \end{aligned}$$

となります。ここで ν は境界 ∂B での単位法線ベクトルであります。ここで Gauss の発散の定理というのは、空間のある閉じた領域の内部が何か或る流体で満たされている時、その内部でさらに流体のある量が発生したとすれば、それと同じ量の流体が、その表面から流出しなければならないという直感的な事実を、式の形で表現したものであります。ところで仮定によって、 ∂B 上では、 $v \equiv 0$ でありますから、[57] 式の右辺はゼロであります。そこで u が $L(u) = 0$ の解であったとすると、

$$[58] \quad \iiint_B uM(v) d\sigma = 0$$

が成り立たねばなりません。

逆に、 ∂B 上でゼロとなるような任意関数 v について [58] 式が成り立てば、

$$[59] \quad \iiint_B vL(u) d\sigma = 0$$

が成り立ちますから、変分学の基礎定理によって

$$[60] \quad L(u) = 0$$

であることとなります。このように任意関数 v に対して積分条件 [59] 式で与えられるような解を、この微分方程式の“弱い解 weak solution” といいます。

特性曲面

上記の領域 B が、さらに境界 G によって二つの部分領域 B_1 と B_2 に分かれ、関数 u はそれぞれの領域で連続で、

$$[61] \quad B_1 \text{ 上では } u = u_1 = \text{const}$$

$$[62] \quad B_2 \text{ 上では } u = u_2 = \text{const}$$

となり、またそれぞれの領域で $L(u) = 0$ の解になっているが、境界 G 上では $u_1 \neq u_2$ で不連続になっているとします (図10)。

そのとき、領域 B_1 と B_2 の各々について

$$[63] \quad \iiint_{B_1} vL(u) d\sigma = 0$$

$$[64] \quad \iiint_{B_2} vL(u) d\sigma = 0$$

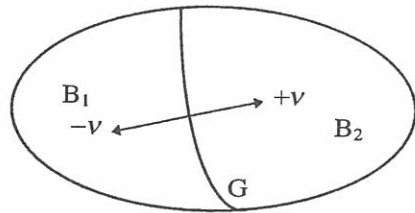


図10. 部分領域 B_1, B_2 と境界 G

が成り立ちますから、領域全体でも

$$[65] \quad \iiint_B vL(u) d\sigma = \iiint_B uM(v) d\sigma = 0$$

が成り立ちます。そのとき仮定によって境界 ∂B 上では関数 v は恒等的にゼロでありますから、それぞれの領域について再び Gauss の発散の定理を使うと

$$[66] \quad \iint_{B_1} uM(v) d\sigma = + \iint_G uv\mu v dS$$

$$[67] \quad \iint_{B_2} uM(v) d\sigma = - \iint_G uv\mu v dS$$

を得ます。ここで ν は G 上の単位法線ベクトルが、領域 B_1 と B_2 とに対して丁度反対方向を持つために、反対符号をつけた訳であります。[67] 式によって

$$[68] \quad \iiint_{B_1 \cup B_2} u M(v) d\sigma = 0$$

でありますから、[68] 式と [69] 式を加えて

$$[69] \quad \iint_G (u_1 - u_2) v \mu v dS = 0$$

が得られます。しかし、境界 G 上では $u_1 \neq u_2$ でありますから、この積分記号中の二つのベクトルの内積 $\mu \cdot \nu$ がゼロでなくてはなりません。それは境界面 G の切平面の成分を $(dx dy dz)$ としたとき、

$$[70] \quad \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{c}$$

が成り立っていることを意味します。すなわち、上記のような不連続な境界 G は、微分方程式の特性曲面に他ならないことが証明されたのであります。われわれの樹幹表面

$$[71] \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dz}{d\tau} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{dz}{d\tau} \frac{R'(z)}{R(z)} r \frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

に対して、その特性曲面は

$$[72] \quad \frac{dt}{1} = \frac{dz}{\frac{dz}{d\tau}} = \frac{dr}{\frac{dz}{d\tau} \frac{R'(z)}{R(z)} r}$$

になりますが、これは樹幹表面の方程式 [22] になります。以上の説明によって、樹幹の Heaviside 関数 u が、 $u = 1$ の領域から樹幹表面で不連続に $u = 0$ に移るということが明らかになりました。

波面としての樹幹表面

通常の波動方程式というと、例えば一次元のそれは

$$[73] \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

のように二階の偏微分方程式でなければならないように思われていますが、これを形式的に

$$[74] \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0$$

と書き直して見ると、それぞれ

$$[75] \quad \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

という一階の方程式の解がその解となることが判ります。それぞれが“弱い解”

$$[76] \quad u = H(x \pm ct)$$

をもちます。それらが衝撃波 shock wave として、左右に速さ c で伝播して行きます。

同様に、上に得た方程式 [51] は、一階ではありますが波動の方程式であります。これは Sloboda 氏が私が予想していた波動方程式だったのであります。このように樹幹表面は、ただ一方的に外に拡大して行く波の全面 wave front としての擬似球面 S なのであります。

まとめ

一階の偏微分方程式、特に線形同次のそれに就いては、既存の研究によって残らず解明されてしまったように思っていました。しかし、意外なことに、 $u = \text{const}$ もまた解であるという判り切った事が見落とされていたのであります。このことは二階以上の同次方程式についても広く応用できるように思います。以上私が説明申し上げたような内容は普通の教科書にはないとおもいます。

たまたま、W.E. Williams の本で、いわゆる“弱い解”というものの存在を知り、それを何とか読み解いて、以上のような私なりの解釈に到達したのであります (Williams 1980)。後から振り返って見ますと、“弱い解”という概念は S.L. Sobolev の“一般的な解” generalized solution であり、Courant-Hilbert にも、波動方程式の wave front として記述されていた訳であります、その意味はこれらの書物からはなかなか掴めませんでした (Courant and Hilbert 1996, Petrovsky 1954)。それは、実は $\iiint_B u M(v) d\sigma = 0$ という制限つきの任意関数 v について

$$[77] \quad \iint_{\partial B} vL(u) dS = 0$$

を満足するという一種の超関数であった訳であります。ここでは任意関数 v が超関数 u の台 support の役を果たしていることになります。それは Dirac の δ -関数が、台の役をする任意関数 $f(x)$ に対して

$$[78] \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$$

で定義されるのと軌を一にしています。したがって、ここで述べましたような事柄は L. Schwarz の超関数 distribution の概念が、1950 年に出てくるまで、あるいは、それが出た後も長く応用数学者には明らかにされていなかったのであります (Gelfand and Shilov 1964)。私が参考にした Williams の本も、“弱い解” というのは超関数だという風には書いていませんでしたので、その意味はなかなか判りませんでした。

二階の偏微分方程式に関する超関数解については、元来 Schwarz の発想そのものが、それを目標としていたものであって、その方面の研究は、前世紀の後半に非常な発展を遂げたのであります。ところが意外なことに、一階の方程式についての研究は、そこに見落とされていたような感があります。有名な John の教科書でも、“弱い解” の定義を二階の方程式については、超関数解として、私が [59] 式で述べたような形で、はっきりと定義していますが、一階の方程式については、それは違った形で説明しているので、かなり混乱させられました (John 1978)。

兎も角、こうして、およそ 10 年間探し続けて自分なりの解答をやっと見出すことが出来た訳であります。しかし結論は簡単で

「樹幹表面は wave front として拡大する樹幹細胞の Quasisphere である」ということでもあります。改めて考えて見ますと、樹幹とは一種の球であるという理屈はなかなか面白いと思っています。

長時間に亘るご静聴有難うございました。

引用文献

Bertalanffy, L. 1952. Theoretische Biologie, II. Band, Stoffwechsel, Wachstum,

- A.Francke.
- Braun, H.J. 1988. Baum und Leben der Bäume, Rombach.
- Courant, R. and Hilbert, D. 1966. Methods of mathematical physics, vol.II, Partial differential equations, Interscience.
- Duff, G.F. 1956. Partial differential equations, Univ. Tronto.
- Eisenreich, G. und Sube, R. 1982. Wörterbuch Mathematik, Harri Deutsch.
- Erwe, E. und Peschl, E. 1972. Partielldifferentialgleichungen erster Ordnung, B.I.
- Gelfand, I.M. and Fomin, S.V. 1963. Calculus of variations, Prentice-Hall.
- Gelfand, I.M. and Shilov, G.E. 1964. Generalized functions, vol.1.
- John, F. 1978. Partial Differential Equations, Springer.
- 倉田吉雄 1939. 神宮備林の法正状態に関する研究, 学位論文(東大).
- 増山元三郎 1948. 非心型 Langevin 氏確率方程式の定数の図式推定法とその臨床医学的応用, 統計推理研究, vol.2, No.2.
- 松村直人 2003. 長柱の座屈理論に基づく樹高曲線式の応用可能性, 統計数理, vol.51, No.1.
- 長嶋 郁 1991. 樹幹形に関する研究, 学位論文(名大).
- 南雲秀次郎・佐藤 健 1965. Mitscherlich 式による森林の生長予測, 東大演習林報告, No.61.
- Petrovsky, I.G. 1954. Lectures on Partial Differential Equations, Dover.
- Plesse, W. und Rux, D. 1982. Biographien bedeutender Biologen, Volks und Wissen Volkseigener.
- 徐 玉河 1988. 林木直径生長のシミュレーション, 学位論文(名大).
- Sloboda, B. 1976. Mathematische und stochastische Modelle zur Beschreibung der Statik und Dynamik von Bäumen und Beständen, Habilitationsschrift (Univ. Freiburg).
- 鈴木太七 1961. 林木の生長法則(林地肥培効果の評価に関する研究報告の一部).
- 鈴木太七 1979. 森林経理学, 朝倉書店.
- Suzuki, T., Sloboda B., Saborowski J. 1983. Beiträge zur biometrischen Modellbildung in der Forstwirtschaft, Schriften aus der Forstlichen Fakultät der Univ.

- Göttingen, Band 76, Sauerlander's.
- Suzuki, T. 1985. Ein Beispiel der Schätzung für Forstschäden durch Luftverschmutzung, Inventory and Monitoring Endangered Forest, IUFRO Conference Zürich, Anstalt für das forstliche Versuchswesen.
- Suzuki, T. 1995. Die von der Schaftskurvenschär eines wachsenden Baumes erzeugte Fläche, Deutscher Verband Forstlichen Forschungsanstalten, Sektion Forstliche Biometrie und Informatik, 8 Tagung, Tharandt/Grillenburg.
- Suzuki, T. 1996. Die Stammoberfläche als Quasikugel, Sektion Forstliche Biometrie und Informatik, 9 Tagung, Oybin/Zittau.
- Suzuki, T. 1998. Die Stammoberfläche als Quasikugel, Sektion Forstliche Biometrie und Informatik, 11 Tagung, Freiburg.
- Strasburger, E. 1983. Lehrbuch der Botanik, Gustav Fischer.
- Takeuchi K. 1981. Application of Mitscherlich's Equation to the growth of Stand Volume, Bulletin of the Niigata Univ. Forests, No.14.
- 寺澤寛一 1960. 自然科学者のための数学概論, 岩波.
- Williams, W.E. 1980. Partial Differential Equations, Clarendon.
- 山本充男・松村直人・鈴木太七 1984. 長柱の座屈理論に基づく樹高曲線について, 日林論, No.95.