

Mean-Reverting過程による林分経営最適確率 制御モデルの比較分析

A Comparative Analysis of A Stochastic Control Model based on Mean-Reverting Process for Forest Stand Management

吉本 敦

Yoshimoto, Atsushi

キーワード: 林分経営, 確率モデル, 確率動的計画法, 確率微分方程式, 木材価格

要約:

本研究では幾何ブラウン運動と標準Mean-Reverting過程の特徴を利用した変形Mean-Reverting過程による丸太価格の確率モデル, 及び離散型の確率動的計画法により林分経営のための最適確率制御モデルを構築した。ここで構築した最適確率制御モデルは林分経営において, 「伐採-植林」, 「伐採-放棄」, 及び「伐採待ち」行動の3つに対する最適選択問題であり, 間伐などの中間的な行動は考慮していない。また, 林分材積成長には不確実性を考慮せず, 九州地域の林分密度管理図及び標準育林体系によった。1975年~2000年までの月次スギ丸太価格時系列データを用いて, 確率モデルのパラメータ推定期間を様々に変え分析した結果, 変形Mean-Reverting過程のパフォーマンスが最も良かった推定期間は1980年9月~1991年4月, その時の平均的に収斂する値が2万6千円付近であることが分かった。また, 得られる最適伐期齢については, 初期価格がこの値より低ければ, 漸次的に常に価格が上昇する期待があり, 最適伐期齢が限りなく延期される結果となることがわかった。逆に, この値を上回る場合, 初期価格と収斂する値との差により最適伐期齢が異なるものの, 初期価格が収斂する値に近づくに従い, 最適伐期齢は長くなることがわかった。すなわち, 森林所有者が期待する将来的な収斂値に木材価格が近づくに従い, 伐期齢の延期が観察されるという結果になる。

Abstract: A stochastic model for log price dynamics was provided with use of a variant of mean-reverting process, in which the drift term was a linear function of price and the volatility term was a function of price as in that of geometric Brownian motion. By approximating this stochastic model by the binomial process, we constructed a stochastic control model for forest stand management. The proposed control model was to select an optimal decision from three controls, "Harvest-Plantation", "Harvest-Abandon", and "Wait for Harvesting" under price stochasticity. The forest stand growth was derived from the stand density management diagram in the Kyushu region, following the standard forestry practice manual. Using the monthly time series data of sugi (*Cryptomeria japonica*) log price from 1975 to 2000, our analyses showed that the proposed mean-reverting process outperformed geometric Brownian motion most based on AIC for the time series data from September of 1980 to April of 1991. The resultant reverted mean became around 26,000 Yen/m³. As for the corresponding optimal rotation age, it was showed that if the current log price was lower than the resultant reverted mean, the rotation was postponed forever due to the large degree of expectation of price increase over time. On the other hand, if the current price was above the reverted mean, the rotation age became longer as the current price approached to the reverted mean.

Keywords: forest stand management, log price, stochastic differential equation, stochastic dynamic programming, stochastic model

1. はじめに

木材価格の不確実性を考慮し価格に対する確率モデルを構築する場合、価格のダイナミクスに課せられる仮定如何により様々なモデルの構築が可能である。一般的に価格のダイナミクスを確率論的に記述する場合、平均的な動き (Drift Term) と分散的な動き (Volatility Term) をある関数により記述した確率微分方程式が用いられる。その場合、それらの関数型を変えることにより、様々な確率微分方程式、すなわち確率モデルの構築が可能になる (参照 Duffie 1992)。

このような確率微分方程式による確率モデルを用いて不確実性下における意思決定に関わる資源経済学的な研究を行ったものには、Brennan and Schwart(1985), Bailey(1991), Zinkhan(1991), Morck et al.(1989), Clarke and Reed(1989), Reed and Clarke(1990), Haight and Holmes(1991), Reed and Ye(1994), Thomson(1992), Yoshimoto and Shoji(1998), Plantinga(1998),

Thorsen(1999)などがある。上記研究の多くは、価格のダイナミックスを幾何ブラウン運動あるいは標準Mean-Reverting過程によりモデル化している。また、不確実性下における意思決定では、離散型の確率動的計画法、連続型のOptimal Stopping Methodを用いている場合が多い。

本研究では幾何ブラウン運動と標準Mean-Reverting過程の特徴を利用した変形Mean-Reverting過程(Courtadon 1982)により価格のダイナミックスをモデル化し、離散型の確率動的計画法により価格の不確実性下における林分経営のための最適確率制御モデルを構築する。なお、林分成長には成長の不確実性を考慮せず九州地域の林分密度管理図を用いる。

2. 変形Mean-Reverting過程による確率モデルと離散化

ここで仮定する価格に対する確率モデルは次式に示す変形Mean-Reverting過程であり、幾何ブラウン運動と標準Mean-Reverting過程を基にしたものである。

$$[1] \quad dx_t = (\alpha + \beta x_t)dt + x_t \sigma dB_t$$

すなわち、右辺第一項のDrift Termには標準Mean-Reverting過程のそれを使用し、第二項のVolatility Termには幾何ブラウン運動のものをを用いた。なお、 x_t は時間 t における価格、 B_t は以下の性質に従う標準ブラウン運動を表す。

1. $B_0 = 0$
2. $\{B_t, t \geq 0\}$ は定常・独立に変化する
3. 全ての $t (>0)$ に対して、 B_t は分散 t 、平均 0 の正規分布に従う。

最適確率制御モデルの構築では、確率動的計画法を通して最適化問題を解くため、二項過程による近似法を用いて上記の連続型確率モデル[1]を次のように離散化する必要がある。まず、上記の過程に対し下記のように対数変換による変数変換を行う。

$$[2] \quad y_t = \ln(x_t)$$

次に伊藤の公理 (Gardiner 1985) を用いると、

$$[3] \quad \begin{aligned} dy_t &= \frac{d \ln(x_t)}{dx_t} dx_t + \frac{1}{2} \frac{d^2 \ln(x_t)}{dx_t^2} (dx_t)^2 \\ &= \left(\beta + \frac{\alpha}{x_t} - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dB_t \end{aligned}$$

となる．すなわち，新たな変数 y_t は状態依存の Drift Term，
 $(\beta + \frac{\alpha}{x_t} - \frac{1}{2}\sigma^2)dt$ を持つことが分かる．また同時に，

$$[4] \quad \Delta y_t = y_{t+\Delta t} - y_t = (\beta + \frac{\alpha}{x_t} - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sigma(B_{t+\Delta t} - B_t)$$

であるので， Δy_t は正規分布に従うことがわかる．そこで，二項過程による近似では Δy_t について，微少時間間隔 $(t, t+\Delta t)$ に対称的な増減 $(\ln(u), -\ln(u))$ を仮定し， Δy_t が $+\ln(u)$ になる確率を P_t ， $-\ln(u)$ になる確率を $(1-P_t)$ とする Bernoulli 試行を考える．従って，この Bernoulli 試行において，与えられた y_t に対し Δy_t の条件付き期待値は

$$[5] \quad E(\Delta y_t | y_t) = P_t \cdot \ln(u) + (1-P_t) \cdot (-\ln(u)) = (2P_t - 1) \cdot \ln(u)$$

となり，分散は，

$$[6] \quad \text{Var}(\Delta y_t | y_t) = P_t \cdot (\ln(u))^2 + (1-P_t) \cdot (-\ln(u))^2 = (\ln(u))^2$$

となることがわかる．一方[4]式より， Δy_t の期待値は

$$[7] \quad E(\Delta y_t | y_t) = (\beta + \frac{\alpha}{x_t} - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t$$

分散は

$$[8] \quad \text{Var}(\Delta y_t | y_t) = \sigma^2 (dB_t)^2 = \sigma^2 \Delta t$$

となる．従って，まず期待値について[5]式と[7]式が一致することから，確率 P_t を以下のように算出できる．

$$[9] \quad P_t = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{\ln(u)} \left(\frac{\alpha}{x_t} + \beta - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \Delta t \right\}$$

また，分散について[6]式と[8]式が一致することから，変化量 $\ln(u)$ を下記により求めることができる．

$$[10] \quad (\ln(u))^2 = \sigma^2 \Delta t \quad \text{or} \quad u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

この結果を[9]式に導入すれば，

$$[11] \quad P_t = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\alpha}{x_t} + \beta - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \sqrt{\Delta t} \right\}$$

となる．すなわち，連続型の確率モデル[3]は上記パラメータ変換により二項過程により近似することができる．更に， y_t と変数 x_t との関係 $(y_t = \ln(x_t))$ から， x_t に基づく Bernoulli 試行は以下のように解釈できる．

微小時間間隔 $(t, t + \Delta t)$ において, x_t は確率 P_t で $u \cdot x_t$, 確率 $(1 - P_t)$ で x_t / u に変化する.

3. 確率制御モデル

次に近似された二項過程に基づく確率動的計画法を用いて, 林分経営の伐採行動に対する最適確率制御モデルを構築する. なお, Yoshimoto and Shoji(1998), 吉本(2002)は幾何ブラウン運動に基づく最適確率制御モデルを構築しているが, 本質的な構造はここで用いるものと同じである.

まず, 最適化問題に対する目的を計画期間内の植林・伐採行動から得られる期待収益の現在価値の最大化とする. また, 可能な管理行動, すなわち制御変数は林分を伐採し植林する「伐採-植林」行動, 伐採し林地を他の利用し, 経営を放棄する「伐採-放棄」行動, そして伐採を控える「伐採待ち」行動とする. その他間伐などの行動はここでは考慮しない. 従って, 構築される確率動的計画法は価格と林齢の状態(State), 時間という期間(Stage)からなる1期間・2状態の確率動的計画法モデルとなる.

上記で得られた二項過程を用いると, 微小時間間隔 Δt を1期間とすると第 n 期, $n \cdot \Delta t$, において, i 回価格が上昇した価格 $S_{n,i}$ は

$$[12] \quad S_{n,i} = u^i \cdot d^{n-i} \cdot S_{0,0}$$

となる. ここで $S_{0,0}$ は現在における初期価格である. $V(n, S_{n,i}, j)$ を第 n 期の i 回価格上昇, j 林齢の (i, j) 状態における最大期待収益とする. すなわち, 第 n 期, i 状態価格, j 林齢における最適化方程式は

$$[13] \quad V(n, S_{n,i}, j) = \max \{ E_{n,i,j}[H - P], R_{n,i,j}[H - A], E_{n,i,j}[W] \}$$

となる. ここで

$$[14] \quad E_{n,i,j}[H - P] = S_{n,i} \cdot Q_j + \frac{P(S_{n,i}) \cdot V(n+1, S_{n+1,i+1}, 1) + (1 - P(S_{n,i})) \cdot V(n+1, S_{n+1,i}, 1) - C_a}{1+r} - C_r$$

$$[15] \quad R_{n,i,j}[H - A] = S_{n,i} \cdot Q_j + Alt$$

$$[16] \quad E_{n,i,j}[W] = \frac{P(S_{n,i}) \cdot V(n+1, S_{n+1,i+1}, j+1) + (1 - P(S_{n,i})) \cdot V(n+1, S_{n+1,i}, j+1) - C_a}{1+r}$$

である。 n 期において、 j 林齢の林分、 i 回の価格上昇後の価格に対する「伐採待ち」行動による期待収益は $E_{n,i,j}[W]$ であり、次期以降の価格の増減及び林齢の増加から推定される期待収益となる。 r は 1 期間に対する割引率であり、 C_a は期間経営費用である。「伐採－植林」行動による期待収益 $E_{n,i,j}[H-P]$ は、伐採から得られる収益とその後の植林により得られる期待収益の和になる。また、「伐採－放棄」行動による収益 $R_{n,i,j}[H-A]$ は、伐採から得られる収益 $S_{n,i} \cdot Q_j$ と放棄により得られる収益 Alt の和となり、確率的要素を持たないことが分かる。なお、 Q_j は j 林齢のヘクタール当たり材積、 C_r は n 期での伐採直後にかかる造林費用を表している。また、「伐採待ち」、「伐採－植林」行動から得られる期待収益はそれぞれ 1 期間割引かれる。また、前述したように変形 Mean-Reverting 過程の二項過程の近似では、増減に関わる確率 $P(\cdot)$ は価格状態 $S_{n,i}$ に依存する。この最適化方程式に基づき後ろ向き繰り返し演算 (backward recursion) (Hillier and Lieberman 1990) を用いて、期間 $n = 1 \sim N$ 、価格状態 $i = 0 \sim n$ 、林齢状態 $j = 1 \sim J+n$ と変化するネットワークに対し、与えられた現時点での初期価格における最適な行動を各林齢について探求する。なお、 N は最終期間、 J は第 1 期における最高齢の林齢である。価格の変化と林齢の変化は、期間の増加に伴い 1 単位ずつ変化する。ここで構築する確率動的計画法のアルゴリズムを図 1 に示す。

4. 擬最尤法による変形 Mean-Reverting 過程の係数推定

ここでは、前章で示した変形 Mean-Reverting 過程の係数推定の方法について述べる。この方法は局所線形化近似法 (Local linearization Method) と呼ばれるもので、Ozaki (1985)、Shoji (1998) などにより開発されたものである。森林関係での応用では Yoshimoto and Shoji (2002) がある。変形 Mean-Reverting 過程に対しては、下記のとおりである。

まず、前述したように変数変換により $y_i = \ln(x_i)$ とすると [3] 式を得る。

$$[3] \quad dy_i = \left(\beta + \frac{\alpha}{x_i} - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dB_t$$

ここで、Drift Term を下記のようにある種の y_i の関数とすることができる。

Step 0. Initialization
 Set $t=T, d_{t,i,j}=\{H-A\}$ for $i=0,..,T$ and $j=1,..,J+T$.
 Calculate $V^*(T, S_{T,j}, j) = S_{T,j} \cdot Q_j + ALT$ for $i = 0, 1, .., T, j = 1, 2, .., J + T$
 given that $S_{T,j} = u^j \cdot d^{T-i} \cdot S_{0,0}$

Step 1. Iteration
 Set $t=t-1$. Find an optimal decision, $d^*_{t,i,j} (\in D)$ for $i=0,..,t$ and $j=1,..,J+t$ such that
 $V^*(t, S_{t,j}, j) = \max \{E_{t,i,j}[W], E_{t,i,j}[H - P], E_{t,i,j}[H - A]\}$
 where

$$E_{t,i,j}[W] = \frac{P \cdot V^*(t+1, S_{t+1,i+1}, j+1) + (1-P) \cdot V^*(t+1, S_{t+1,i}, j+1) - C_a}{1+r}$$

$$E_{t,i,j}[H - P] = S_{t,j} \cdot Q_j + \frac{P \cdot V^*(t+1, S_{t+1,i+1}, 1) + (1-P) \cdot V^*(t+1, S_{t+1,i}, 1) - C_a - C_r}{1+r}$$

$$E_{t,i,j}[H - A] = S_{t,j} \cdot Q_j + ALT$$
 given that $S_{t,j} = u^j \cdot d^{t-i} \cdot S_{0,0}$

Step 2. Iterative Judgement
 If $t=1$, then go to Step 3, otherwise go to Step 1.

Step 3. Final Judgement
 Find an optimal rotation age, t_{opt} such that
 $t_{opt} = \{j \mid \inf_j \text{ subject to } d^*_{0,0,j} = [\{H - K\} \text{ or } \{H - A\}]\}$
 Then terminate the procedure.

図1. 林分経営に関わる最適確率制御モデルの解法アルゴリズム

[17]
$$h(y_t) = \left(\beta + \frac{\alpha}{x_t} - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)$$

従って、[3]式は

[18]
$$dy_t = h(y_t)dt + \sigma dB_t$$

となる。 $h(y_t)$ に対し、再度伊藤の公理を適用すると、

[19]
$$\begin{aligned} dh(y_t) &= h'(y_t)dy_t + \frac{1}{2}h''(y_t)(dy_t \cdot dy_t) \\ &= h'(y_t)dy_t + \frac{1}{2}\sigma^2 h''(y_t)dt \end{aligned}$$

となる。ここで、非常に微小な時間間隔に対して $h'(y_t)$ 及び $h''(y_t)$ は一定と考えることができるため、微小時間間隔内 $[t, t + \Delta t)$ のある時点 s について、

[19]式は

[20]
$$\begin{aligned} h(y_s) - h(y_t) &= h'(y_t)(y_s - y_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 h''(y_t)(s - t) \\ h(y_s) &= h(y_t) + h'(y_t)(y_s - y_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 h''(y_t)(s - t) \end{aligned}$$

とすることができる。ここで、[20]式を[18]式に挿入すると、

$$\begin{aligned}
 dy_s &= \{h(y_t) + h'(y_t)(y_s - y_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 h''(y_t)(s-t)\}ds + \sigma dB_s \\
 [21] \quad &= \{h(y_t) - h'(y_t) \cdot y_t - \frac{1}{2}\sigma^2 h''(y_t) \cdot t \\
 &\quad + h'(y_t) \cdot y_s + \frac{1}{2}\sigma^2 h''(y_t) \cdot s\}ds + \sigma dB_s \\
 &= (a \cdot y_s + b \cdot s + c)ds + \sigma dB_s
 \end{aligned}$$

となる。ただし、 (a, b, c) は一定で、

$$\begin{aligned}
 [22] \quad a &= h'(y_t) \\
 b &= \frac{1}{2}\sigma^2 h''(y_t) \\
 c &= h(y_t) - h'(y_t) \cdot y_t - \frac{1}{2}\sigma^2 h''(y_t) \cdot t
 \end{aligned}$$

である。すなわち、Drift Termは状態 y_s と時間 s の一次関数になることがわかる。なお、 $h(y_t)$ は[17]式で与えられているため、

$$[23] \quad h'(y_t) = \frac{dh(y_t)}{dx_t} \cdot \frac{dx_t}{dy_t} = -\frac{\alpha}{x_t^2} \cdot x_t = -\frac{\alpha}{x_t}$$

$$[24] \quad h''(y_t) = \frac{d^2h(y_t)}{dx_t^2} \cdot \frac{dx_t}{dy_t} = \frac{\alpha}{x_t^3} \cdot x_t = \frac{\alpha}{x_t^2}$$

となる。

[21]式の解法に、新たに次ぎの変数を導入し、

$$[25] \quad z_s = y_s e^{-\alpha s}$$

伊藤の公理を用いてDrift Termを時間のみの関数にする。

$$\begin{aligned}
 [26] \quad dz_s &= y_s d(e^{-\alpha s}) + (dy_s) e^{-\alpha s} \\
 &= -\alpha y_s e^{-\alpha s} ds + \{(ay_s + bs + c)ds + \sigma dB_s\} e^{-\alpha s} \\
 &= (bs + c)e^{-\alpha s} ds + e^{-\alpha s} \sigma dB_s
 \end{aligned}$$

その結果、右辺に状態 z_s を含まない確率微分方程式が導かれ、両辺を直接積分ことが可能になる。

$$\begin{aligned}
 [27] \quad z_{t+\Delta t} &= z_t + \int_t^{t+\Delta t} (bs + c)e^{-\alpha s} ds + \sigma \int_t^{t+\Delta t} e^{-\alpha s} dB_s \\
 &= z_t - \frac{1}{\alpha} \{b(t + \Delta t) + c\} e^{t+\Delta t} + \frac{1}{\alpha} \{bt + c\} e^t \\
 &\quad + \frac{b}{\alpha^2} e^{t+\Delta t} - \frac{b}{\alpha^2} e^t + \sigma \int_t^{t+\Delta t} e^{-\alpha s} dB_s
 \end{aligned}$$

ここで、 y_s に変換すると、

$$\begin{aligned}
 [28] \quad y_{t+\Delta t} &= y_t e^{a\Delta t} + \frac{1}{a}(bt+c)(e^{a\Delta t}-1) - \frac{1}{a}b\Delta t + \frac{b}{a^2}(e^{a\Delta t}-1) + \sigma \int_t^{t+\Delta t} e^{a(t+\Delta t-s)} dB_s \\
 &= y_t + \frac{1}{a}(ay_t + bt+c)(e^{a\Delta t}-1) + \frac{b}{a^2}(e^{a\Delta t}-1-a\Delta t) + \sigma \int_t^{t+\Delta t} e^{a(t+\Delta t-s)} dB_s
 \end{aligned}$$

となる。[28]式の右辺最後の項は平均、

$$[29] \quad E[\sigma \int_t^{t+\Delta t} \exp(a(t+\Delta t-s)) dB_s] = 0$$

分散、

$$\begin{aligned}
 [30] \quad V_t &= VAR[\sigma \int_t^{t+\Delta t} \exp(a(t+\Delta t-s)) dB_s] \\
 &= \sigma^2 \int_t^{t+\Delta t} \exp 2(a(t+\Delta t-s)) dB_s^2 \\
 &= \sigma^2 \int_t^{t+\Delta t} \exp 2(a(t+\Delta t-s)) ds \\
 &= \frac{\sigma^2 \cdot (\exp(2a\Delta t) - 1)}{2a}
 \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}
 [31] \quad \varepsilon_t &= \sigma \int_t^{t+\Delta t} e^{a(t+\Delta t-s)} dB_s \\
 &= y_{t+\Delta t} - y_t - \frac{1}{a}(ay_t + bt+c)(e^{a\Delta t}-1) - \frac{b}{a^2}(e^{a\Delta t}-1-a\Delta t)
 \end{aligned}$$

とすると、

$$[32] \quad \varepsilon_t \sim N(0, V_t)$$

であることがわかる。そこで、[32]式より導かれる下記の擬対数尤度関数の最大化によりパラメータを推定することができる。

$$\begin{aligned}
 [33] \quad \log(p(y_{t_0}, y_{t_1}, \dots, y_{t_N})) \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \left\{ \frac{(y_{t_i} - E_{t_{i-1}})^2}{V_{t_{i-1}}} + \log(2\pi V_{t_{i-1}}) \right\} + \log(p(y_{t_0}))
 \end{aligned}$$

ただし、

$$[34] \quad E_t = y_t + \frac{1}{a}(ay_t + bt+c)(e^{a\Delta t}-1) + \frac{b}{a^2}(e^{a\Delta t}-1-a\Delta t)$$

x_t に対しては、

$$[35] \quad p(x_{t_0}, x_{t_1}, \dots, x_{t_N}) = p(y_{t_0}, y_{t_1}, \dots, y_{t_N}) \left| \frac{\partial(y_{t_0}, y_{t_1}, \dots, y_{t_N})}{\partial(x_{t_0}, x_{t_1}, \dots, x_{t_N})} \right|$$

となる。ただし $\left| \frac{\partial(\dots)}{\partial(\dots)} \right|$ はヤコビアン行列の行列式の絶対値である。上記で推定される係数値 (α, β, σ) と仮定する微小時間間隔 Δt を用いれば、離散

化された価格のダイナミクスに対する係数 (u, P_t) を得ることができ、それらの値を用いて最適確率制御モデルにより、最適な伐採行動とそれに伴う最適伐期齢を探索できる。

5. 変形Mean-Reverting過程に基づく最適確率制御モデルによる分析

本研究の分析には日本の原木市場のスギの1975年から2000年までの月次原木価格を使用した。なお、データ源は林野庁発行「需給報告書」である。図2に1975年から2000年までのスギの木材価格動向を示し、全時系列データを用いて推定したパラメータを表1に示す。なお、時系列データが月次データであるため、微小時間の間隔 $(t_{n+1} - t_n) = \Delta t$ を1年基準で $\Delta t = 1/12$ とし、パラメータの推定値を求めた。表中のMRPが変形Mean-Reverting過程（以後MRPとする）、GBMが幾何ブラウン運動（以後GBMとする）を表す。表1のパラメータ値からわかるように、MRPについては α が負、 β が正になっているため、価格の動向は漸近値に収斂するのではなく、限りなく減少する結果となっている。なお、GBMのパラメータ推定については吉本(2002)によった。MRP及びGBMの両方のAIC(Akaike 1977)を見てもわかるように、それらの差異はそれほど観察されず、共に価格の減少傾向を描写していることがわかる

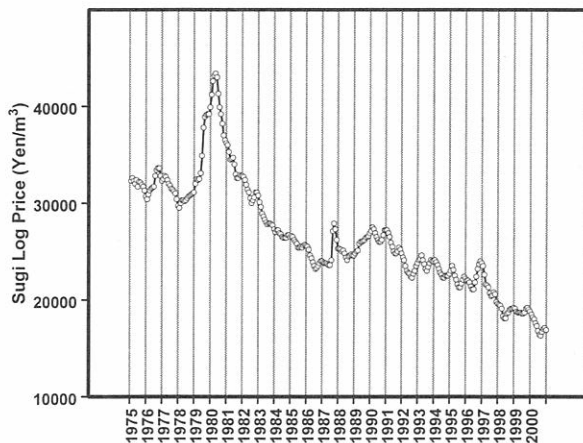


図2. スギ木材価格時系列データ

が、幾何ブラウン運動については、平均的にゼロに収斂していく。図3に表1の結果に基づいた平均的な価格動向と変動を伴うサンプルパスを示す。なお、図中でx軸の0年が1975年に相当する。

表1. スギ丸太価格に対する確率モデルパラメータ推定結果

Model	α	β	σ^2	AIC
MRP	-0.63648 (-0.4743)	0.001696 (0.0317)	0.003419 (25.5921)	100.4381
GBM		-0.02331 (-1.8066)	0.003426 (25.8646)	100.3395

MRP:変形Mean-Reverting過程, GBM:幾何ブラウン運動, 括弧内 t 値

パラメータの推定値は推定に用いられる時系列データに依存するため、次に推定期間を変化させることにより観察される実際の時系列データに対し確率モデルのパフォーマンスを分析した。はじめに、推定期間を12ヶ月から1

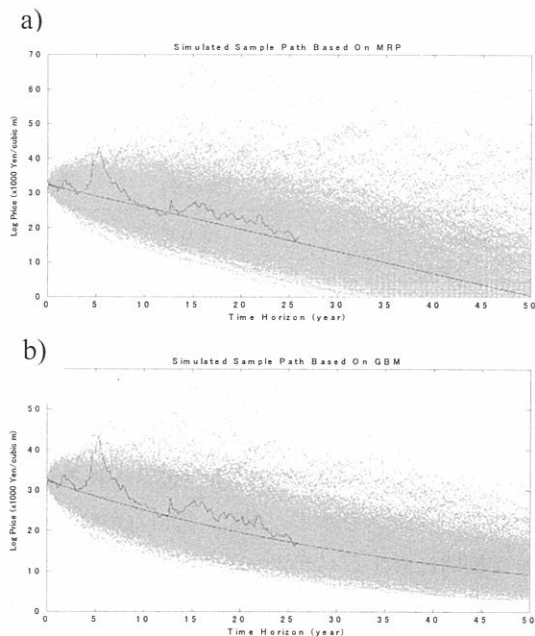


図3. 確率モデルに基づくサンプルパス

a)変形Mean-Reverting過程 (MRP)、b)幾何ブラウン運動 (GBM)

ヶ月間隔で全期間まで期間長を設定し、それぞれの期間長で1975年から順次1ヶ月ずつ移動させ、対応する期間長でのパラメータの推定を行った。その結果、合計3926回のパラメータ推定を行い、MRPのパフォーマンスをGBMのそれと比較した。その結果、全体を通してAICによる比較を行った結果、2609回GBMがMRPを上回る結果が観察されたが、AICの差が2以上あるものは3回であった。すなわち、GBMが優位な場合、AICでのパフォーマンスにはあまり違いがあるとは言えないことがわかる。それに対し、MRPが優位なケースは1317回であり、そのうちAICの差が2以上あったものは653回あり、GMBとの差が顕著になるケースが多いことがわかった。表2にAICに基づき、MRPのパフォーマンスが最も良かった場合とGBMのそれが最も良かった場合のパラメータ推定値を示す。

表2. パフォーマンスに基づく確率モデルパラメータ推定結果

	Model	α	β	σ^2	AIC
MRP優位 推定期間 1980.09 ~ 1991.04	MRP	17.2193 (3.5066)	-0.6735 (-3.7209)	0.0029616 (20.6495)	-89.03
	GBM		-0.0447 (-2.0783)	0.0033029 (21.6473)	-70.13
GBM優位 推定期間 1991.08 ~ 1998.07	MRP	-0.0357 (-0.0057)	-0.0382 (-0.1343)	0.0034894 (5.9071)	-71.25
	GBM		-0.0398 (-1.7733)	0.0034901 (6.0269)	-73.25

MRP:変形Mean-Reverting過程, GBM:幾何ブラウン運動, 括弧内t値

MRPのパフォーマンスが最もいい推定期間は1980年9月~1991年4月までであった。図4にこれらのパラメータに基づくサンプルパスを示す。GBMが全体を減少傾向で捉えるのに対し、MRPは平均に収斂する傾向を捉えることができることが分かる。このような現象が観察される時系列データでは、MRPが良いパフォーマンスを示す。次に、図5にGBMのパフォーマンスが最も良かった推定期間に対するパラメータの推定値によるサンプルパスを示す。表2のパラメータの推定値から分かるように、GBM, MRP共に β が負で同じような値になっているため、図5のサンプルパスは同じような傾向を

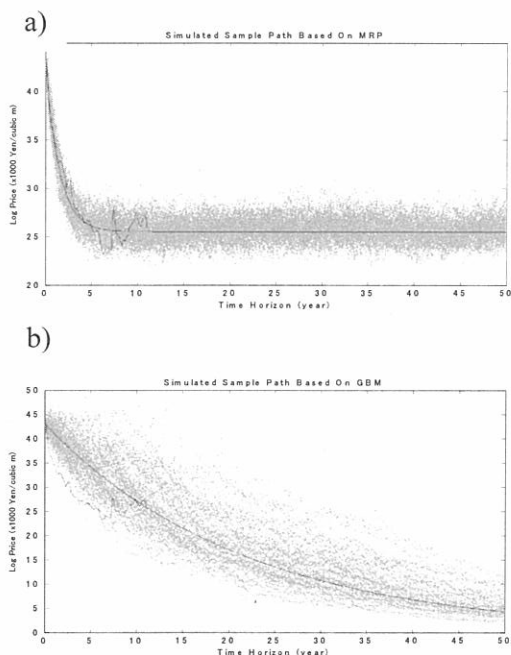


図4. 期間1980.09～1991.04に対する確率モデルに基づくサンプルパス

a)変形Mean-Reverting過程 (MRP)、b)幾何ブラウン運動 (GBM)

示している. すなわち, α の値が0に近い場合は, 同じような傾向を示すことがわかる.

最後に, 表1, 2で得られた推定値に基づき, ここで構築した最適確率制御モデルを用いて, 最適伐期齢の探求を行った. 間伐については, 標準育林体系に基づき, 植林から12,19,28,35年に500本/haの間伐を施すものとし, 九州地域の林分密度管理図を用いて図6に示す林分材積成長を仮定した. GBMについては, 吉本(2002)で構築したモデルを用いた. 年間経営費 (C_o) は10,000円/ha, 植林費 (C_r) を400,000円/haとした. 割引率 r を1%, 林地の転換による価値 Alt は0とした. また, 主伐費用は6,000円/ha, 間伐費用は7,000円/ha, 幹材積から丸太への歩留まりは65%と仮定した.

表1に基づく結果を図7に示す. x 軸が現時点における初期価格 $S_{0,0}$ を示し, y 軸が伐採行動, すなわち「伐採—植林」あるいは「伐採—放棄」行動

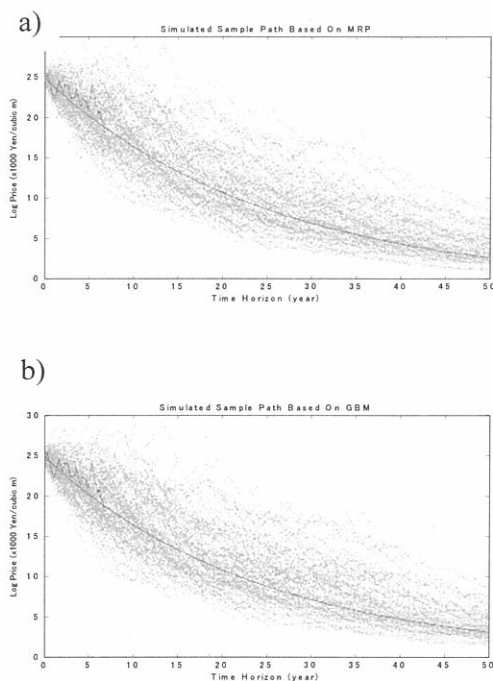


図5. 期間1991.08～1998.07に対する確率モデルに基づくサンプルパス
a)変形Mean-Reverting過程 (MRP)、b)幾何ブラウン運動 (GBM)

が最適解として得られる最小林齢（最適伐期齢）を示す。図中のGBM、MRP共にピークを境に、初期価格が高い方が「伐採－植林」行動による持続的な経営、低い方が「伐採－放棄」行動による経営の放棄となる。図7からわかるように、GBMに比較し、MRPから得られる最適伐期齢は全体的に10年前後短くなることわかる。このことは、図3で示されたサンプルパスに見られるように、価格の将来的な減少の度合いがMRPの方が強いいため、その分早めの伐採が促されたものと考えられる。

図8は、表2においてMRPが最も良いパフォーマンスを示したパラメータを用いた結果を示す。GBMについては表1の結果と比較し、 β の値が更に減少し、その結果、最適伐期齢が全体に短くなる結果となった。それに対し、MRPは平均的に収斂する値が2万6千円付近で観察されるため（図4）、持続・放棄に二分するピークは観察されない結果となった。すなわち、初期価

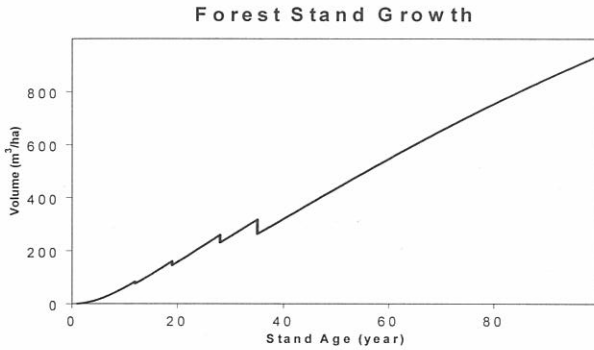


図6. 標準育林体系に基づく林分材積成長曲線

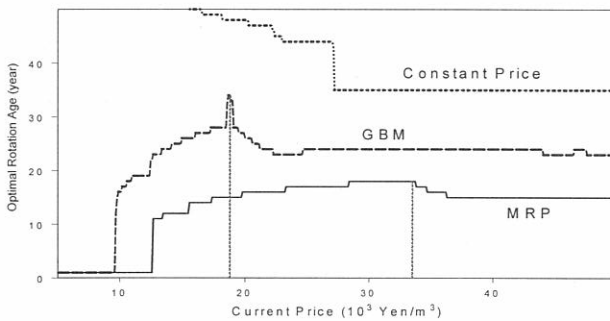


図7. 全期間を通した時系列データに対する初期価格と最適伐期齢

格がこの値より低ければ、漸近的に常に価格が上昇する期待があるため、伐採が延期される結果となる。逆に、この漸進値より高い場合は、初期価格が収斂する値に近づくと最適伐期齢が長くなる傾向が観察された。

図9にはGBMのパフォーマンスが最も良かった時の分析結果を示す。前述したように、将来的な価格の動向が類似しているため、同じような最適伐期齢の変化が観察されるが、図6同様に、GBMから得られる最適伐期齢に対し、全体的にMRPから得られるものが短くなる傾向がある。GBMについては、観察されるピークが図6よりも右に移動しているものの、MRPについてはほぼ同じ初期価格の時にピークが観察された。

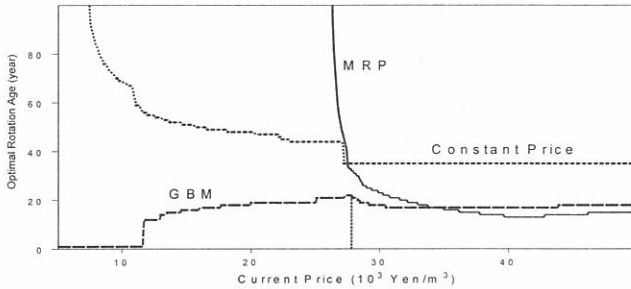


図8. 変形Mean-Reverting過程優位時の初期価格と最適伐期齢

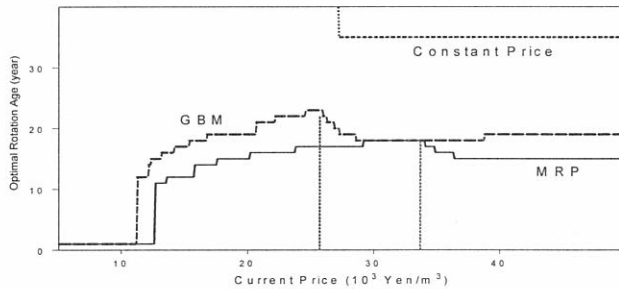


図9. 変形Mean-Reverting過程劣位時の初期価格と最適伐期齢

6. 結論

本研究では幾何ブラウン運動と標準Mean-Reverting過程の特徴を利用した変形Mean-Reverting過程により丸太価格のダイナミックスを描写し、離散型の確率動的計画法により確率的に変化する価格を考慮した林分経営のための最適確率制御モデルを構築した。ここで構築した最適確率制御モデルは林分経営において、「伐採-植林」, 「伐採-放棄」, 及び「伐採待ち」行動の3つに対する最適選択問題であり、間伐などの中間的な行動は考慮していない。また、林分材積成長には成長の不確実性は考慮せず、九州地域の林分密度管理図及び標準育林体系を用いた。最適確率制御モデルの構築には、仮定した変形Mean-Reverting過程を二項過程により近似した。その結果、これま

で用いられてきた幾何ブラウン運動の場合、近似する二項過程において価格の増減の確率が推定されるパラメータにより固定されていたが、変形Mean-Reverting過程においては、価格の状態に依存する確率になることがわかった。

日本の原木市場のスギの1975年から2000年までの月次原木価格を使用しパラメータを推定した結果、変形Mean-Reverting過程については α が負、 β が正になったため、価格の動向は漸近値に収斂するのではなく、限りなく減少する結果となった。その結果、これらの推定値に基づく最適伐期齢については、幾何ブラウン運動を仮定して得られた結果に比べ、全体的に10年前後短くなり、早めの伐採が促される結果となった。

次に、時系列データ長を変化させパラメータ推定期間を変えることにより、価格動向のパターンの違いに対する確率モデルのパフォーマンスについて分析した結果、変形Mean-Reverting過程のパフォーマンスが最も良かった推定期間は1980年9月～1991年4月までとなった。その場合、平均的に収斂する値が2万6千円付近で観察された。最適伐期齢については、初期価格がこの値より低ければ、漸近的に常に価格が上昇する期待があり、最適伐期齢が限りなく延期される結果となることがわかった。逆に、この値を上回る場合、初期価格と収斂する値との差により最適伐期齢が異なるものの、初期価格が収斂する値に近づくに従い、最適伐期齢は長くなることがわかった。すなわち、森林所有者が期待する将来的な収斂値に木材価格が近づくに従い、伐期齢の延期が観察されるという結果になる。このことは、これまで幾何ブラウン運動を用いて観察された最低許容価格(吉本 2004)に対する初期価格と最適伐期齢の変化に類似することがわかる。すなわち、収斂値が最低許容価格と考えられることになる。

変形Mean-Reverting過程は推定されるパラメータの符号の組み合わせにより、単調増加、単調減少、及び平均値への収斂を表現することができる。単調増加及び単調減少については、幾何ブラウン運動によりある程度類似的に描写できるが、平均的な値への収斂の現象については、幾何ブラウン運動のパフォーマンスは悪くなり、変形Mean-Reverting過程の使用が不可欠になる。ここで使用した時系列データを用いても、パラメータの推定期間によっ

ては変形Mean-Reverting過程がより優れているケースがあった。その場合、導出される最適伐期齢に大きな違いが観察された。このことから、想定される確率モデルの選択が最適伐期齢の探求に重要な役割を果たすことがわかる。

謝辞

本研究は、文部科学省科学研究費（基盤研究（B）(2):No.15330048）を受けて行われたものである。

引用文献

- Akaike, H. 1977. On entropy maximization principle, pp.27-41, Application of Statistics, (Krishnaiah, P.R. ed), North-Holland, Amsterdam, 543p.
- Bailey, W. 1991. Valuing agricultural firms: An examination of the contingent-claims approach to pricing real assets, *Journal of Economic Dynamics and Control* 15:771-791
- Brennan, M.J. and Schwartz, E.S. 1985. Evaluating natural resource investments, *Journal of Business* 58:135-157
- Clarke, H.R. and Reed, W.J. 1989. The tree-cutting problem in a stochastic environment, *Journal of Economic Dynamics Control* 13:569-595
- Courtadon, G. 1982. The pricing of options on default-free bonds, *Journal of Financial Economics* 9:103-108
- Duffie, D. 1992. Dynamic asset pricing theory, Princeton University Press, New Jersey, 299 p.
- Haight, R.G. and Holmes, T.P. 1991. Stochastic price models and optimal tree cutting results for loblolly pine, *Natural Resource Modeling* 5:423-443
- Hillier, F.S. and Lieberman, G.J. 1990. Introduction to operations research, McGraw Hill, New York, 954p.
- Gardiner, C.W. 1985. Handbook of stochastic methods, Springer, New York, 442p.

- Morck, R., Schwartz, E., and Stangeland, D. 1989. The valuation of forestry resources under stochastic prices and investments, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 24:473-487
- Ozaki, T. 1985. Statistical identification of storage models with application to stochastic hydrology, *Water Resources Bulletin* 21:663-675
- Plantinga, A.J. 1998. The optimal timber rotation: An option value approach, *Forest Science* 44:192-202
- Reed, W.J. and Clarke, H.R. 1990. Harvest decisions and asset valuations for biological resources exhibiting size-dependent growth, *International Economic Review* 31:147-169
- Reed, W.J. and Ye, J.J. 1994. The role of stochastic monotonicity in the decision to conserve or harvest old-growth forest, *Natural Resource Modeling* 8:47-79
- Shoji, I. 1998. Approximation of continuous time stochastic processes by a local linearization method, *Mathematics of Computation* 67(221):287-298
- Thomson, T.A. 1992. Optimal forest rotation when stumpage prices follow a diffusion process, *Land Economics* 68:329-342
- Thorsen, B.J. 1999. Afforestation as a real option: Some policy implications, *Forest Science* 45:171-178
- 吉本敦. 2002. 確実性環境下の森林資源管理に対する最適確率制御モデル, pp.89-110, 森林資源管理と数理モデル (吉本敦・松村直人・近藤洋史 編集), 森林計画学会出版局, 東京, 198p.
- 吉本敦. 2004. 最適確率制御モデルを用いた貿易自由化の森林資源管理への影響分析, pp.103-124, 森林資源管理と数理モデル Vol.3 (鹿又秀聡・吉本敦 編集), 森林計画学会出版局, 東京, 156p.
- Yoshimoto, A. and Shoji, I. 1998. Searching for an optimal rotation age for forest stand management under stochastic log prices, *European Journal of Operational Research* 105:100-112
- Yoshimoto, A. and Shoji, I. 2002. Comparative analysis of stochastic models for financial uncertainty in forest management, *Forest Science* 48: 755-766

Zinkhan, F.C. 1991. Option pricing and timberlands land-use conversion option,
Land Economics 67:317-325