

松くい虫被害量推移モデルの有効性について

Simulation Models for Dynamics of Wood Volume Damaged by Pine Wilt Disease

稲田 充男

Inada, Mitsuo

キーワード: 流行病モデル, 松くい虫被害, カーブフィッティング

要約: 筆者は、カーマック・マッケンドリックの流行病モデルを応用し、松くい虫被害量推移モデルを導き、その適合性ならびに予測性について検討してきた。しかし、松くい虫の被害状況が次々と報告される中で、従来のモデル構造のままでは対応できない事例が出てきた。本論では、これまでのモデル構造を見直し、モデルの多重化およびベースライン付加の必要性を認め、より現実を再現できる新たなモデルを提案し、その適合性について検討した。

Abstract: This paper is intended to present models for describing the dynamics of actual wood volume damaged by the pine wilt disease. Applying the Kermack-McKendrick epidemic curve, we derived the simulation model and tested its applicability. However, the model is not able to explain the various situation by the structure as is. The model structure is reviewed in order to support the various situation and recognized necessity of the multiplexing of the model and the addition of the base. The new models that can express the situation more definitely are suggested.

Keywords: Curve fitting, epidemic curve, pine wilt disease

1. はじめに

松くい虫被害は、マツノマダラカミキリにより運ばれたマツノザイセンチュウがマツの樹体内に侵入することにより引き起こされるマツの伝染病

によるものであり、北海道と青森県を除く全国 45 都府県の松林において発生している。筆者は、カーマックとマッケンドリックが 1905 年 12 月 17 日から 1906 年 7 月 21 日の約 7 ヶ月、インドのボンペイで流行したペストによる死亡者数のデータにあてはめた流行病モデルを応用し、松くい虫被害量推移モデルを導き、その適合性ならびに予測性について検討してきた(稲田, 1993a, b, 1994)。島根県全域ならびに島根県斐川町の 1973 年～1990 年の被害量の調査結果にこのモデルをあてはめ、被害の推移傾向をうまく表現できることを認めた。また、被害量の予測性能についても、実用範囲内の十分正確な見積もりができることを認めた。

しかし、1990 年以降、同県の松くい虫の被害量が次々と報告される中で、従来のモデル構造では説明できない状況が出てきた。また、市町村、県、全国と適応対象を広げた場合にも、このモデルでは対応できないことがわかってきた。本論では、このような状況に対応すべく、これまでのモデル構造を見直し、モデルの重ね合わせやベースライン付加の必要性を認め、より現実を再現できる新たなモデルを提案するとともに、その適合性について検討した。また、近年特に本州日本海側を中心にミズナラやコナラ等の集団の枯損が急激に拡大している「カシノナガキクイムシ」が媒介するナラ菌による被害量の推移にこの新たなモデルを実験的にあてはめた結果についても報告する。

2. カーマック・マッケンドリックの流行病モデルとその近似解

本節では、カーマック・マッケンドリックの流行病モデルとその近似解について、佐藤 (1991) の説明を引用し紹介する。ただし、式の番号は本文に合わせて変更してある。また、不要部分は一部省略してある。

ある地域に住む n 人の集団を考える。その地域の住民は他の地域の住民と全く交流せず、その地域のなかだけで、お互いが均等に交流しているものとする。また、住民の出生、自然死、他地域への移住などもいっさい考えないことにする。したがって、全住民数 n は一定であるとしてよい。

つぎに、住民は感染者、感受性者からなる二つのグループの他に、除去者からなる第三のグループに分けられているものとしよう。ただし、除去者

とは、病気に感染して死亡した者、回復して免疫をもつ者、免疫をもつまでその地域から隔離されている者などをいう。

さらに、その病気に感染すると予感受性者はただちに感染者に変わるものと仮定しよう。これは潜時をまったく無視するということである。ここで潜時とは、感染後、病原菌が宿主の体内で増殖し、やがて体外へ排出されるまでの期間をいう。これは、いわゆる潜伏期とはちがうので、区別したほうがよい。

さて、ある時期 t の感受性者を $x(t)$ 、感染者を $y(t)$ 、除去者数を $z(t)$ であらわし、これらの関数はいずれも t について微分可能であると仮定する。このとき

$$[1] \quad x + y + z = n$$

である。

いま、感受性者数の変化率は x と y の積に比例すること、除去者数の変化率は y に比例すること、および除去者は y に比例して一定の割合で感染者のグループから除かれること、などを仮定する。すると、これらの仮定より、次の一組の微分方程式をえる。

$$[2] \quad \frac{dx}{dt} = -\beta xy, \quad \frac{dy}{dt} = \beta xy - \gamma y, \quad \frac{dz}{dt} = \gamma y$$

ただし、 β は感染率 (または接触率)、 γ は除去率とよばれ、いずれも正の定数である。

微分方程式系 [2] はカーマック・マッケンドリックの流行病のモデルと呼ばれている。

[2] の第一式を第三式でわれば

$$[3] \quad \frac{dx}{dz} = -\frac{\beta}{\gamma} x = -\frac{x}{\rho}$$

をえる。 x を y の関数とみてこの微分方程式を解けば

$$[4] \quad x(z) = x_0 \exp(-z/\rho)$$

をえる。ただし

$$[5] \quad \rho = \frac{\gamma}{\beta}$$

である。一方, [1] より

$$[6] \quad y = n - z - x$$

これを [2] の第三式の右辺に代入し, この x にさきほど求めた $x(z)$ を代入すれば,

$$[7] \quad \frac{dz}{dt} = \gamma \{n - z - x_0 \exp(-z/\rho)\}$$

をえる。ところが, この微分方程式の解を具体的にあらわすことは難しい。そこで近似解を求める。

伝染病の流行がそれほど激しくないとき, 住民の交流から除去される者の数 z は小さい数であるとみてよい。また, $1/\rho$ は一般にかなり小さな数になるから, z/ρ は相対的に小さな数であると考えられる。したがって, テイラーの公式により $\exp(-z/\rho)$ を展開し, [7] の右辺に代入し, 整理し定数をまとめると,

$$[8] \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\gamma x_0}{2\rho^2} \{A^2 - (z - B)^2\}$$

となる。この微分方程式は, これは変数分離型であり, 未定係数法を用い, 部分分数に分解し解くことができ,

$$[9] \quad z(t) = \frac{\rho^2}{x_0} \left\{ \left(\frac{x_0}{\rho} - 1 \right) + \lambda \tanh \left(\frac{\gamma\lambda}{2} t - \mu \right) \right\}$$

をえる。ただし

$$[10] \quad \mu = \tanh^{-1} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{x_0}{\rho} - 1 \right)$$

である。この $z(t)$ がモデル [2] の近似解である。

3. 松くい虫被害量推移モデル (原型モデル)

公衆衛生統計では [9] の近似解をそのまま用いず、増加率の形で用いる。すなわち、 z の導関数 dz/dt として定義される流行曲線を用いる。[9] の近似解より流行曲線を求めると、

$$[11] \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\gamma\rho^2\lambda^2}{2x_0} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\gamma\lambda}{\rho}t - \mu\right)$$

をえる。実際には、[11] を整理して、

$$[12] \quad f(t) = \frac{dz}{dt} = M \operatorname{sech}^2(kt - \mu)$$

として用いる。

上記の流行曲線が導かれた過程はそのまま松くい虫被害量推移モデルに応用でき、 $x(t)$ を健全木量、 $y(t)$ を松くい虫被害木量、 $z(t)$ を被害木の中から枯死・伐採除去等により確認された被害量と解釈すれば、[12] は松くい虫被害量推移モデルそのものである。[12] のパラメータ μ の性格を明確にするために、 $\mu = k\tau$ とおくと、

$$[13] \quad f(t) = M \operatorname{sech}^2(k(t - \tau))$$

となり、これが松くい虫被害量推移モデル (原型) である。ここで、 $f(t)$ は被害量、 M は被害量の最大値、 τ は被害量が最大になる時刻、 k は被害量の増加速度にかかわるパラメータである。本論では、この [13] を原型モデルと呼び、それぞれの単位を $f(t)$ 、 M : $\text{m}^3/\text{年}$ 、 τ : 年、 k : 年^{-1} とする。参考までに、この原型モデルを宮城県全域の 1976 年から 2006 年の松くい虫被害量の調査結果 (宮城県農林水産部) に対してあてはめると、[14]、図 1 のようになる。

$$[14] \quad f(t) = 26.2 \operatorname{sech}^2(0.085(t - 1998))$$

残差平方和は 2.313、相関係数は 0.965。ただし、被害量 $f(t)$ の単位は ($1000 \text{ m}^3/\text{年}$) である。また、図中、 \circ は調査結果、曲線はあてはめたモデルによる推定結果である。なお、本論文ではあてはめ計算には、非線形最小二乗法の中で収束までの計算速度は遅いが、比較的安定した結果が得られ

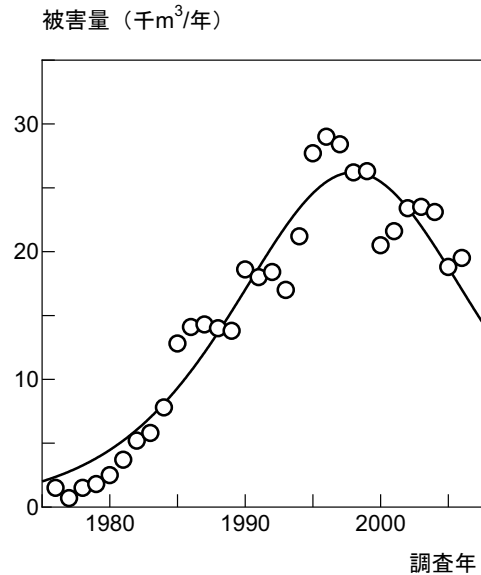


図 1. 宮城県全域の松くい虫被害量の推移と原型モデルあてはめ結果

るシンプレックス法を用いた。図 1 や被害量の実測値と推定値の相関係数が示すように、調査結果が示す被害の推移状況を原型モデルは十分表現していると判断できる。原型モデルは地域を限定しその中での被害発生から収束までの状況を表現するために導かれたものである。そのような状況に対して、原型モデルは十分対応できることがわかる。

4. 原型モデルの重ね合わせ (重畳モデル)

本節では、鳥根県農林水産部報告の鳥根県全域の被害量の推移についてみる。これは、筆者がかつて原型モデルの有効性を検討するために用いた資料である。図 2 に鳥根県全域の被害量の推移状況を示すもので、図中、○は 1973 年～1990 年の調査結果、●は 1996 年～2006 年の調査結果、波線は 1973 年～1990 年の調査結果に対して原型モデルあてはめた結果

$$[15] \quad f(t) = 106.3 \operatorname{sech}^2(0.1896(t - 1985))$$

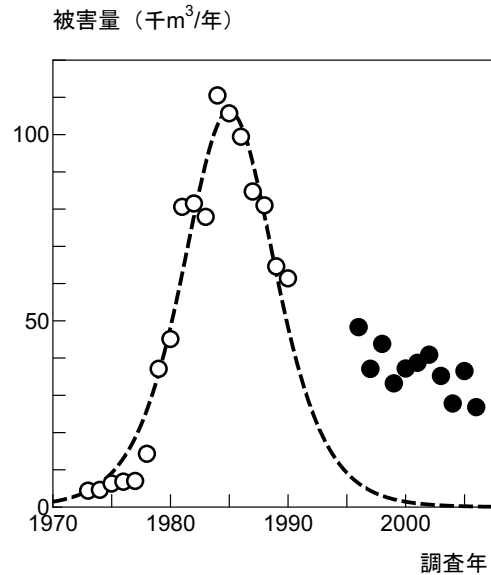


図 2. 島根県全域の松くい虫被害量の推移と原型モデルあてはめ結果

である。ただし、被害量 $f(t)$ の単位は ($1000 \text{ m}^3/\text{年}$) である。明らかに、原型モデル [15] は 1973 年～1990 年の推移状況を的確に表現しているが、1996 年～2006 年の状況をまったく表してはいない。原型モデルは地域を限定しその中の被害発生から収束までの状況を表現するために導かれたものであり、被害発生・収束が複数回考えられるような状況では、単純な原型モデルでは対応できない。このような場合には、原型モデルの重ね合わせが必要と考えられる。被害の発生・収束ごとに原型モデルを重ね合わせた

$$[16] \quad f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \dots$$

を適応する必要がある。ただし、

$$[17] \quad f_j(t) = M_j \operatorname{sech}^2(k_j(t - \tau_j)), \quad (j = 1, 2, \dots)$$

である。本論では [16] を重畳モデルと呼ぶことにする。この重畳モデルを

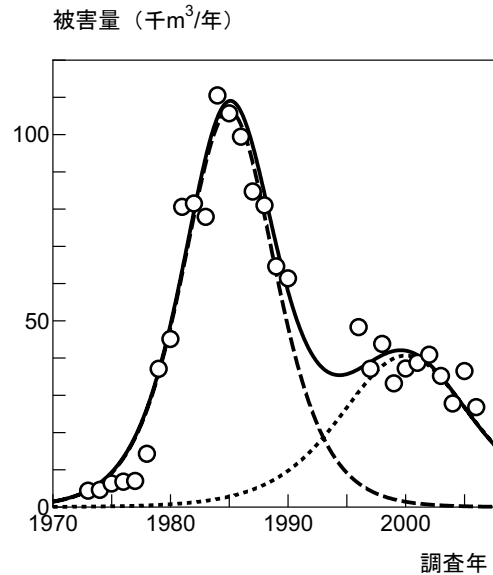


図 3. 島根県全域の松くい虫被害量の推移と重畳モデルあてはめ結果

島根県全域の被害量の推移に当てはめた結果は

$$\begin{aligned}
 [18] \quad f(t) &= 106.3 \operatorname{sech}^2(0.1896(t - 1985)) \\
 &\quad + 40.47 \operatorname{sech}^2(0.1340(t - 2000))
 \end{aligned}$$

残差平方和は 7.381, 相関係数は 0.971 で, 図 3 にその様子を示す. 図中, \circ は調査結果, 実線はあてはめた重畳モデルによる推定結果で, 波線および短波線は重畳モデルの基となった各原型モデルの値である. 図 3 や実測値と推定値の相関係数が示すように, 調査結果が示す被害の推移状況を重畳モデルは表現しているものと判断できる.

ここでは重畳モデルの基となる原型モデルを二つ重ねたが, 本来ならば原型モデルをどれだけ重ねればよいか検討する必要がある. しかし, この点については, 本論の主要な目的が松くい虫被害量推移モデルそのものの紹介であるので, 続報以下に譲ることにする. ただし, この問題はモデルの適応目的・利用方法に大きく依存し, 被害の推移状況への適合性のみを追

求するならば重ね合わせる原型モデルの数は多くなり、被害の推移状況より中軸となる主要な被害発生・収束過程に分解し被害のメカニズムを分析するならばその数は限定されよう。

5. 重畳モデルへのベースラインの付加 (重畳基底モデル)

本節では、全国の松くい虫被害量の推移についてみる。全国の被害推移状況は図4のとおりである(林野庁, 2007)。この資料は、全国の民有林と国有林(官行造林地を含む)それぞれの被害量(被害材積)を合計したもので、民有林については都道府県からの報告、国有林については森林管理局からの報告によるものである。図4からわかるように、全国集計されることにより、加害虫が絶滅することがない限り存在するであろう、被害量が0ではない下限(ベースライン)が読み取れる。全国版の被害にあてはめる場合には、このベースラインを表す関数を重畳モデル[16]に付け加える必要がある。ただし、この関数に対する理論的根拠ないしは知見を有しないので、本論では、図4から推察し、下限を表す定数パラメータ C を付加すること

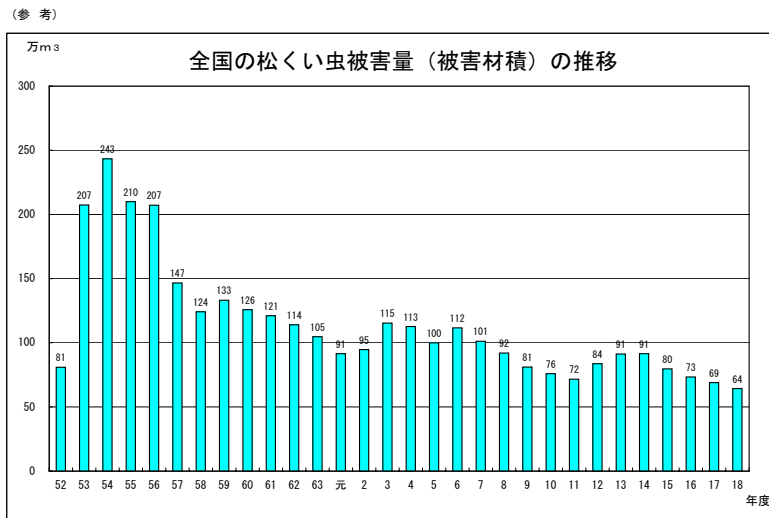


図4. 全国の全国の松くい虫被害量(被害材積)の推移

にする。このモデルを重畳基底モデルと呼ぶことにし、次式で表す。

$$[19] \quad f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \cdots + C$$

ただし、

$$[20] \quad f_j(t) = M_j \operatorname{sech}^2(k_j(t - \tau_j)), \quad (j = 1, 2, \dots)$$

で C は下限を表す定数である。この [19] が本論で提案する最も一般的な松くい虫被害量推移モデルである。このモデルを図 4 の全国集計にあてはめた結果は

$$[21] \quad \begin{aligned} f(t) = & 1499 \operatorname{sech}^2(0.3759(t - 1980)) \\ & + 304.4 \operatorname{sech}^2(0.1554(t - 1992)) + 772.5 \end{aligned}$$

残差平方和は 181, 相関係数は 0.907 で、図 5 にその様子を示す。ただし、被害量 $f(t)$ の単位は (1000 m³/年) である。図中、○ は調査結果、実線はあてはめた重畳基底モデルによる推定結果で、波線および短波線は重畳モデルの基となった各原型モデルの値、点線はベースライン C である。図 5 のモデルのあてはまりの様子や相関係数の値から判断すると、全国の松くい虫の被害量推移の傾向をこの重畳基底モデルは十分表現していると思われる。しかし、全国集計は、前述のごとく各地の被害量を積み上げたもので、被害量の大小により、その被害発生・収束状況を必ずしも反映しているとは限らない。よって、ここで示した重畳基底モデルの基となった各原型モデルが、どの被害発生・収束状況に対応しているのか、それを特定することにはあまり意味はない。ただ、ここで新たに導入したベースラインの値は、全国の被害量の下限値として理解するならば、森林資源の適切な管理・経営の観点から、下限値をどのように制御するか、その判断材料として、また、薬剤散布などの効果を評価する基礎資料として、意味を持つものと思われる。

6. ナラ菌による被害の推移へのあてはめ

ナラ菌による被害について、平成 18 年度森林・林業白書に次のように記載されている。

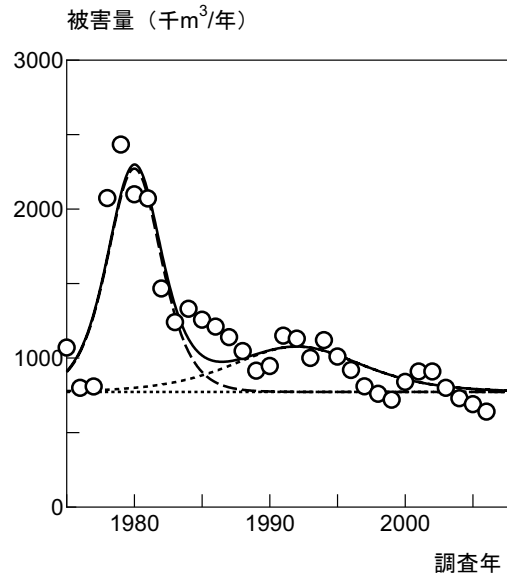


図 5. 全国の松くい虫被害量の推移と重畳基底モデルあてはめ結果

“松くい虫以外の害虫による森林被害では、「カシノナガキクイムシ」が媒介する通称「ナラ菌（ブナ科樹木萎凋病菌）」による被害が増加している。これは、大量のカシノナガキクイムシがナラ・カシ類等の幹に穴をあけてせん入し、体に付着したナラ菌を多量に樹体内に持ち込むことにより発生するものである。近年、特に本州日本海側を中心にミズナラやコナラ等の集団的枯損が急激に拡大しており、新たな被害区域の拡大を未然に防止するため、的確な防除対策の推進が重要となっている。”

同白書に掲載されている「カシノナガキクイムシが媒介するナラ菌による被害の推移」を読み取り、原型モデルおよび重畳基底モデルをあてはめた。同資料によると、ナラ菌によるその被害発生状況ははまだ増加傾向にあり、まだ第一のピークを過ぎていない。よって、ここでは重畳基底モデルの基となる原型モデルは一つだけとした。あてはめ結果を図 6 に示す。た

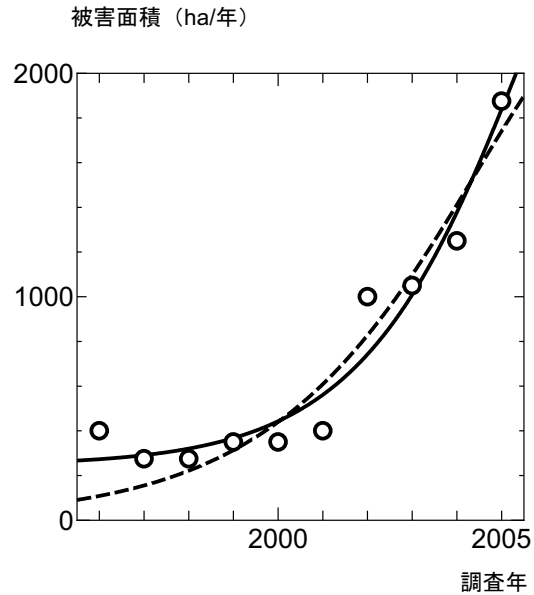


図 6. 全国のナラ菌による被害量の推移と原型モデル
および重畳モデルあてはめ結果

だし, 被害量 $f(t)$ の単位は ha/年である. 図中, \circ は調査結果, 波線はあてはめた原型モデル

$$[22] \quad f(t) = 2331 \operatorname{sech}^2(0.1845(t - 2008))$$

による推定結果 (残差平方和 = 152.1, 相関係数 = 0.956) で, 実線はあてはめた重畳基底モデル

$$[23] \quad f(t) = 2629 \operatorname{sech}^2(0.2456(t - 2008)) + 244.4$$

による推定結果 (残差平方和 = 118.0, 相関係数 = 0.974) である. 全国集計の被害量に対するあてはめであり, 前節で提示した重畳基底モデルが適用できるものとする. ただし, この種のいわゆる「ピーク曲線」の場合, あてはめ計算に用いる資料そのものがピークを示すようなものであれば,

それより計算される曲線式は、数年におよぶ比較的長期予測が可能であるが、被害の初期段階では十分な予測はできない。図 6 や実測値と推定値との間の高い相関係数が示すように、調査結果が示す被害の推移状況をこれらのモデルは十分表現しているものと考えられるが、現段階の資料数ではこれ以上のことは言及できない。今後、この被害に関する調査結果が順次出されて来た段階で、さらに検討を加えたいと考えている。

7. おわりに

松くい虫の被害量推移はカーマック・マッケンドリックの流行曲線モデルを応用することにより、その傾向をうまく表現できることについて報告した。特に用いる資料により、原型モデル [13]、重畳モデル [16]、重畳基底モデル [19] と徐々にその形を変えることにより、よりの確にその傾向を表現できることを示した。原型モデルは、連立微分方程式を導いた仮定からもわかるように、ある一定のメカニズムで起こる被害の発生・収束過程を表現する。重畳モデルは中軸となる主要な被害発生・収束過程に分解し、推移状況を解析する。さらに、重畳基底モデルは被害の下限量を特定する。今後は、それぞれのモデルの特徴を考慮し、適応事例を増やししながら、モデルの構造改良に努めたい。

引用文献

- 稲田 充男 (1993a) 松くい虫被害量推移モデルの誘導, 日林関西支論 2: 45-46.
- 稲田 充男 (1993b) 松くい虫被害量推移モデルの誘導とその適合性, 島大農研報 27: 1-6.
- 稲田 充男 (1994) 松くい虫被害量推移モデルによる被害量予測, 日林関西支論 3: 29-32.
- 佐藤 總夫 (1991) 自然の数理と社会の数理 II 微分方程式で解析する, 日本評論社, 東京, 271p.
- 林野庁 (2007) <http://www.rinya.maff.go.jp/j/press/h19-8gatu/0807s.pdf>, 取得年月: 2007 年 8 月.